PROVA DE MATEMÁTICA

01. A tabela indica as projeções do PIB de um país, em bilhões de dólares, daqui a t anos:

t (anos)	PIB (em bilhões de dólares)
1	53
2	58
3	65

Admitindo que no intervalo $1 \le t \le 6$ ($t \in IR$) as projeções do PIB possam ser estabelecidas por um modelo quadrático, pede-se:

(A) a função que relaciona a projeção do PIB (em bilhões de dólares) com t, no intervalo $1 \le t \le 6$ ($t \in IR$);

Resolução:

$P(t) = at^2 + bt + c \ , \ a \neq 0$

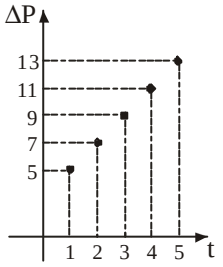
$$\begin{cases} a+b+c=53 \\ 4a+2b+c=58 \\ 9a+3b+c=65 \end{cases} \Rightarrow \quad a=1,\ b=2 \ \ e \ \ c=50$$

$P(t) = t^2 + 2t + 50, \ 1 \le t \le 6 (t \in IR)$

(B) sendo P_t o PIB daqui a t anos, esboce o gráfico que relaciona t com a diferença $P_{t+1} - P_t$ para $1 \le t \le 5$ ($t \in IN$).

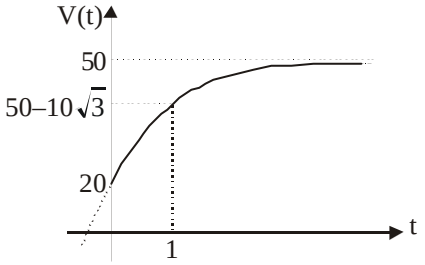
Resolução:

t	$P_{t+1} - P_t = \Delta P$
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13



02. Uma empresa estima que após completar o programa de treinamento básico, um novo vendedor, sem experiência anterior em vendas, será capaz de vender V(t) reais em mercadorias por hora de trabalho, após t meses do início das atividades na empresa. Sendo $V(t) = A - B \cdot 3^{-kt}$, com A, B e k constantes obtidas experimentalmente, pede-se:

(A) determinar as constantes A, B e k, sabendo que o gráfico da função V é



Resolução:

$$\begin{cases} V(0)=20 \\ 20=A-B \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Assíntota em } V(t)=50 \\ \therefore \ A=50 \end{cases}$$

Segue que $20 = 50 - B \Rightarrow B = 30.$

$V(t) = 50 - 30.3^{-kt}$

$50 - 10\sqrt{3} = 50 - 30.3^{-k} \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \ V(t) = 50 - 30.3^{-0,5t}$

(B) admitindo-se que um novo programa de treinamento básico introduzido na empresa modifique a função V para $V(t) = 55 - 24 \cdot 3^{-t}$, determinar t para V(t) = 50. Adote nos cálculos log 2 = 0,3 e log 3 = 0,5.

Resolução:

$50 = 55 - 24.3^{-t}$

$-5 = -24.3^{-t}$

$\log 3^{-t} = \log \frac{5}{24}$

$-t.\log 3 = \log 5 - \log 24$

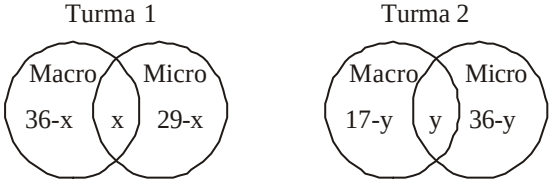
$-t.\log 3 = \log 10 - \log 2 - [3.\log 2 + \log 3] \Rightarrow$ subst.os dados, $t = 1{,}4$ meses

03. Em um curso de economia, 100 alunos estão divididos em duas turmas de 50 alunos, e cada aluno só pode cursar matérias na sua própria turma. Em relação às matérias macroeconomia e microeconomia, que serão ministradas em um mesmo semestre, cada aluno deve matricular-se ao menos em uma delas.
A tabela a seguir indica a distribuição de alunos, por turma, inscritos nessas matérias em um semestre do ano.

	Turma 1	Turma 2
Macroeconomia	36	17
Microeconomia	29	36

(A) Escolhido ao acaso um aluno dentre os 100, qual é a probabilidade de ele estar matriculado em ambas as matérias nesse semestre?

Resolução:



$36-x+x+29-x = 50$
$x = 15$

$17-y+y+36-y = 50$
$y = 3$

$P = \frac{15+3}{100} = 0{,}18 \Rightarrow 18\%$

(B) Escolhidos ao acaso dois alunos dentre os 100, qual é a probabilidade de ocorrência do seguinte evento: ao menos um deles é da turma 1 e ambos estão matriculados em apenas uma entre as duas matérias nesse semestre, não necessariamente a mesma matéria para ambos.

Resolução:

A: aluno 1 é da turma 1 e está matriculado só em macroeconomia, ou só em microeconomia.

B: aluno 2 é da turma 1 ou da turma 2 e está matriculado só em macroeconomia, ou só em microeconomia.

C: aluno 1 é da turma 2 e está matriculado só em macroeconomia, ou só em microeconomia.

D: aluno 2 é da turma 1 e está matriculado só em macroeconomia, ou só em microeconomia.

$P(A) = \frac{35}{100}$ e $P(B) = \frac{81}{99} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{35}{100}.\frac{81}{99} = \frac{2835}{9900}$

$P(C) = \frac{47}{100}$ e $P(D) = \frac{35}{99} \Rightarrow P(C \cap D) = \frac{47}{100}.\frac{35}{99} = \frac{1645}{9900}$

$P[(A \cap B) \cup (C \cap D)] = \frac{2835}{9900} + \frac{1645}{9900} = \frac{224}{495} \approx 45\%$

04. As 19 casas indicadas na figura fazem parte do tabuleiro de um jogo para dois adversários. As regras desse jogo são:

- os adversários devem jogar alternadamente;
- uma jogada consiste em marcar casa(s) no tabuleiro;
- cada jogador, na sua jogada, marca no mínimo 1 e no máximo 4 casas;
- as casas devem ser preenchidas uma após a outra, do início em direção ao fim do tabuleiro;
- ganha o jogador que **não** colocar sua marca na última casa do tabuleiro.

Início Fim

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Pedro e João decidiram jogar esse jogo, cabendo a Pedro fazer a primeira jogada. Responda ao que se pede.

(A) Fazendo marcas, nas casas do tabuleiro, com a letra P para as jogadas de Pedro e J para as de João, simule uma situação de jogo (com Pedro iniciando o jogo). Em seguida, indique o jogador vitorioso no caso simulado.

Resolução:

Uma possível simulação seria: P–P–J–J–P–J–J–P–P–P–J–J–J–P–P–P–P–J , com vitória de Pedro.

Início Fim

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Jogador vencedor da simulação: _____

(B) Analisando as regras do jogo, o jogador que inicia sempre poderá ter uma estratégia para vencer, independentemente das jogadas do seu adversário. Explique, passo a passo, qual é essa estratégia.

Resolução:

A estratégia vencedora do jogador que inicia é:

I. marcar 3 casas;

II. em seguida, colocar as marcas de forma a completar um grupo de 5 casas de acordo com a opção do adversário, ou seja:
- se o adversário marca 1 casa, então marcamos 4 casas;
- se o adversário marca 2 casas, então marcamos 3 casas;
- se o adversário marca 3 casas, então marcamos 2 casas;
- se o adversário marca 4 casas, então marcamos 1 casa.

III. Prosseguir com o passo 2 na seqüência do jogo até o final.