PROVA DE MATEMÁTICA 2ª FASE DEZ/04

Questão 1

a)O faturamento de uma empresa nesse ano foi 120% superior ao do ano anterior; obtenha o faturamento do ano anterior sabendo-se que o desse ano foi de R$1 430 000,00

b)Um comerciante compra calças a um custo de R$26,00 a unidade. Ele pretende vender cada unidade com um ganho líquido (ganho menos os impostos) igual a 30% do preço de venda. Sabendo-se que, por ocasião da venda, ele tem que pagar um imposto igual a 18% do preço de venda, qual deve ser esse preço?

RESOLUÇÃO

a)Seja x o faturamento do ano anterior. Devemos ter:

$$x + 1{,}2x = 1\,430\,000$$ Portanto,

$$2{,}2x = 1\,430\,000$$

$$x = 650\,000$$

b)Seja p o preço de venda. Devemos ter:

$$p - 26 - 0{,}18p = 0{,}3p$$. Portanto,

$$0{,}52p = 26$$

$$p = 50$$

Resposta: a)R$650 000,00 b)R$50,00

Questão 2

Chama-se custo médio de produção ao custo total dividido pela quantidade produzida.
a)Uma fábrica de camisetas tem um custo total mensal dado por $C = F + 8x$, em que x é a quantidade produzida e F o custo fixo mensal. O custo médio de fabricação de 500 unidades é R$12,00. Se o preço de venda for R$15,00 por camiseta, qual o lucro mensal de se fabricar e vender 600 unidades?
b)Esboce o gráfico do custo médio de produção de x unidades, em função de x, se a função custo total for $C = 3000 + 10x$.

RESOLUÇÃO

a)De acordo com o enunciado, temos:

$$12 = \frac{F + 8.(500)}{500} \;\Rightarrow\; F = 2\ 000.$$

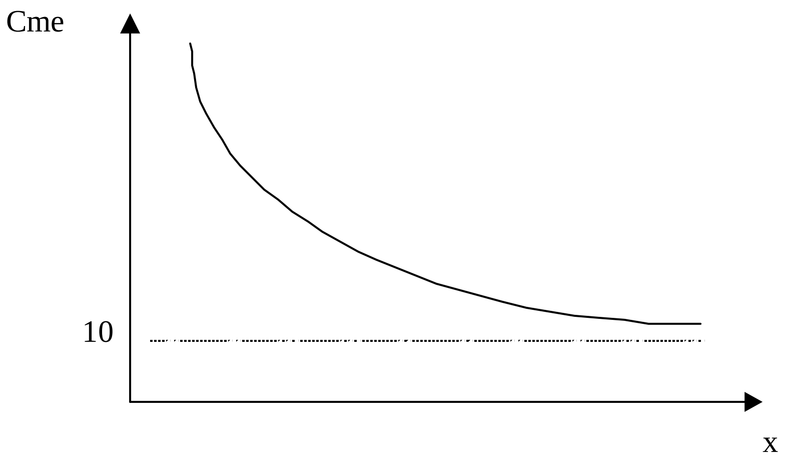
Assim, o lucro na venda da produção de 600 unidades é:

$$L = 15.(600) - \left[2\ 000 + 8.(600)\right] = 2\ 200.$$

b)O custo médio C_{me} é dado por:

$$C_{me} = \frac{3\ 000 + 10x}{x} = \frac{3\ 000}{x} + 10$$

O gráfico do custo médio em função de x é dado abaixo:



Resposta: a)R$2 200,00 b)Gráfico.

Questão 3

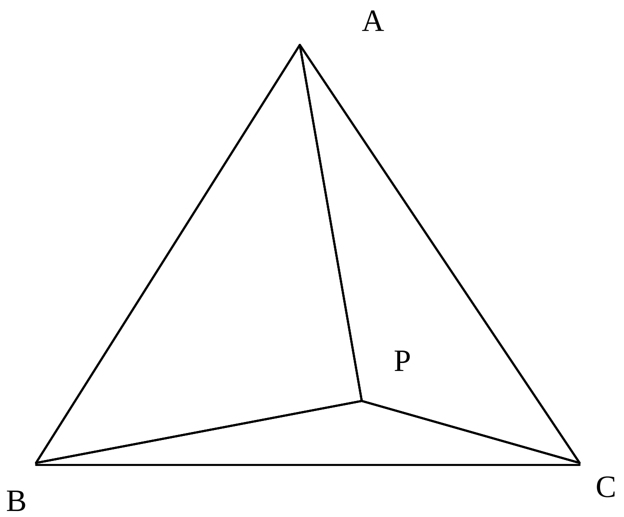
a)Obtenha a área de um triângulo equilátero em função da medida h da altura.
b)Considere um ponto P situado no interior da região triangular determinada por um triângulo equilátero com lado de medida m.Sejam $h_1, h_2, e\ h_3$ as distâncias de P a cada um dos lados. Mostre que $h_1 + h_2 + h_3$ é constante para qualquer posição de P, e determine essa constante em função de m.

RESOLUÇÃO

a)Num triângulo equilátero de lado l, a altura h é dada por $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.
Consequentemente, $l = \frac{2h}{\sqrt{3}}$. Portanto, a área do triângulo vale:

$$A = \frac{l.h}{2} = \frac{\frac{2h}{\sqrt{3}}.h}{2} = \frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}.$$

b)Seja ABC um triângulo equilátero de lado com medida m e P um ponto interior qualquer, como indicado na figura abaixo:



A soma das áreas dos triângulos PAB, PBC e PAC é igual a área do triângulo ABC. Assim:

$$\frac{m.h_1}{2} + \frac{m.h_2}{2} + \frac{m.h_3}{2} = m.m\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Portanto,

$$h_1 + h_2 + h_3 = m.\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Então, a soma $h_1 + h_2 + h_3$ é constante e vale $m.\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Resposta: a) $h^2\frac{\sqrt{3}}{3}$ b)Demonstração.

Questão 4

a)Um capital C foi aplicado a juros simples durante 10 meses gerando um montante de R$10 000,00; esse montante, por sua vez, foi também aplicado a juros simples durante 15 meses à mesma taxa da aplicação anterior, gerando um montante de R$13 750,00. Qual o valor de C?
b)Um capital C é aplicado a juros compostos à taxa de 2% ao mês. Três meses depois, um outro capital igual a C é aplicado também a juros compostos, porém à taxa de 3% ao mês. Durante quantos tempo o 1º capital deve ficar aplicado para dar um montante igual ao do 2º capital? Você pode deixar indicado o resultado.

RESOLUÇÃO

a)O juro da 2ª aplicação é R$3 750,00. Chamando de i a taxa mensal, podemos escrever:

$$3\,750 = 10\,000.i.15 \quad \Rightarrow \quad i = 0{,}025 = 2{,}5\%am\,.$$

Considerando agora a 1ª aplicação, podemos escrever:

$$C + C.(0{,}025).10 = 10\,000$$
$$1{,}25C = 10000 \quad \Rightarrow \quad C = 8\,000\,.$$

b)Seja n o prazo (em meses) que o 1º capital ficará aplicado. O prazo do 2º capital será $(n-3)$. Assim,

$$C(1{,}02)^n = C(1{,}03)^{n-3}$$
$$\log(1{,}02)^n = \log(1{,}03)^{n-3}$$
$$n\log(1{,}02) = (n-3)\log(1{,}03)$$
$$3\log(1{,}03) = n.(\log(1{,}03) - \log(1{,}02))$$
$$n = \frac{3\log(1{,}03)}{\log(1{,}03) - \log(1{,}02)}$$

Resposta: a)R$8 000,00 b) $n = \dfrac{3\log(1{,}03)}{\log(1{,}03) - \log(1{,}02)}$.

Questão 5

a)Mostre que existem infinitas triplas ordenadas (x, y, z) de números que satisfazem a equação matricial:

$$x.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y.\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z.\begin{bmatrix} -1 \\ -10 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)Resolva o sistema linear abaixo, nas incógnitas x e y, usando o conceito de matriz inversa:

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ 5x + 3y = b \end{cases}$$

Use o fato de que a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

RESOLUÇÃO

a)A equação matricial dada é equivalente ao sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x \quad\quad - 10z = 0 \\ -x + y + 7z = 0 \end{cases}$$

Tal sistema é homogêneo e portanto admite a solução trivial (0,0,0). Por outro lado, o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -10 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

vale 0. Logo, o sistema é indeterminado e admite infinitas soluções.

b)O sistema dado pode ser escrito sob a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ ou seja } A.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Multiplicando ambos os membros pela matriz A^{-1}, obteremos:

$$A^{-1}.A.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}.\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow I.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a-b \\ -5a+2b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3a-b \\ y = -5a+2b \end{cases}$$

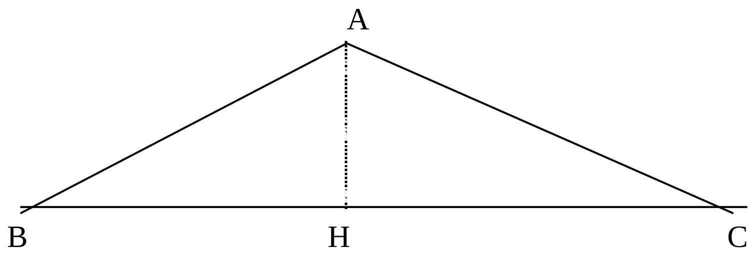
Resposta: a)Demonstração b) $\begin{cases} x = 3a-b \\ y = -5a+2b \end{cases}$

Questão 6

a)Num triângulo isósceles ABC, em que $AB = AC$,o ângulo $\hat{A}$ mede o dobro da soma dos outros dois. O lado $\overline{BC}$ mede 10cm. Obtenha o perímetro desse triângulo.
b)Considerando que $\operatorname{sen} x + \cos x = k$, calcule em função de k, o valor da expressão $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.

RESOLUÇÃO

a)



Chamando de x a medida do ângulo B, a do ângulo C também será x. Como o ângulo A mede o dobro da soma dos outros dois, temos que a medida de A é 4x. Portanto:

$$x + x + 4x = 180^0 \quad \Rightarrow \quad x = 30^0.$$

Sendo $\overline{AH}$ a altura relativa ao lado $\overline{BC}$, e pelo fato do triângulo ser isósceles, concluímos que $BH = 5$, e a medida do ângulo $B\hat{A}H$ é $2x = 60^0$.

Assim, no triângulo ABH, teremos:

$$\cos B = \frac{5}{AB} \quad \Rightarrow \quad \cos 30^0 = \frac{5}{AB} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

O perímetro do triângulo ABC vale:

$$AB + AC + BC = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{3}} + 10 = \frac{20\sqrt{3}}{3} + 10$$

b)Temos:

$$\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = (\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x.\cos x + \cos^2 x) \text{ (I)}$$

Por outro lado:

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x.\cos x + \cos^2 x \;\Rightarrow\; k^2 = 1 + 2\operatorname{sen} x.\cos x \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} x.\cos x = \dfrac{k^2 - 1}{2}$

Levando esses resultados em (I), obtemos:

$$\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = k.\left[1 - \frac{k^2 - 1}{2}\right] = k.\left[\frac{3 - k^2}{2}\right]$$

Resposta: a) $\dfrac{20\sqrt{3}}{3} + 10$ b) $k.\left[\dfrac{3 - k^2}{2}\right]$

Questão 7

a)Um grupo de 40 pessoas planeja espalhar um boato da seguinte forma:

- Cada uma das 40 pessoas telefona para 30 pessoas informando o boato.
- Cada uma das 30 acima referidas é solicitada a telefonar para 20 pessoas, informando o boato.

Qual o número máximo de pessoas que ficam sabendo do boato?
b)Um dado é lançado n vezes. Para que valores de n a probabilidade de que o número 2 apareça ao menos uma vez é maior que 0,95?(o resultado pode ser deixado indicado)

RESOLUÇÃO

a)

- Na 1ª etapa, 40 pessoas sabem do boato.
- Na 2ª etapa, mais (40).(30)=1 200 pessoas ficam sabendo do boato
- Na 3ª etapa , mais (1 200).(20)=24 000 pessoas ficam sabendo do boato.

Assim, o total de pessoas que ficam sabendo do boato é:
40 + 1 200 + 24 000 = 25 240.

b)A probabilidade de que em n lançamentos, o número 2 apareça ao menos uma vez é igual a 1 menos a probabilidade de o 2 não apareça nos n lançamentos. Portanto:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}95$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}05$$

$$n.\log\left(\frac{5}{6}\right) < \log(0{,}05)$$

$$n > \frac{\log(0{,}05)}{\log\left(\frac{5}{6}\right)}$$

Observemos nessa última passagem que houve mudança no sinal da desigualdade porque $\log\left(\frac{5}{6}\right) < 0$, pois $\frac{5}{6}$ é menor que 1.

Resposta :a) 25 240 b) $n > \dfrac{\log(0{,}05)}{\log\left(\frac{5}{6}\right)}$

Questão 8

a)Considere n números reais não nulos $x_1, x_2, x_3, \ \ldots \ , x_n$. Em que condição a variância desses números é nula. Justifique.

b)Dados três números reais $x_1 \ x_2 \ e \ x_3$, qual o valor de m que minimiza a expressão $\sum_{i=1}^{3}(x_i - m)^2$?

RESOLUÇÃO

a)Temos:

$$\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ \ldots \ (x_n - \overline{x})^2}{n} = 0$$ em que $\overline{x}$ é a média dos valores dados.

Como o 1º membro dessa relação é uma soma de quadrados de números reais, ela só será igual a zero quando todas as parcelas forem nulas; esta eventualidade sucede quando

$$x_1 = \overline{x}$$
$$x_2 = \overline{x}$$
....
$$x_n = \overline{x}$$

isto é, quando $x_1 = x_2 = \ldots \ x_n$. Esta última relação garante que

$x_1 = \overline{x}, \ x_2 = \overline{x}, \ \ldots \ , x_n = \overline{x}$, pois $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} = x_1$, e consequentemente,

$x_1 = x_2 = \ \ldots \ x_n = \overline{x}$.

b)A somatória dada vale:

$$(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + (x_3 - m)^2 = 3m^2 - m(2x_1 + 2x_2 + 2x_3) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Como são dados os valores de $x_1, x_2 \ e \ x_3$ a expressão acima é uma função quadrática de m. O valor de m que minimiza a função é a abscissa do vértice da parábola (com concavidade voltada para cima) que é o gráfico da função. Portanto:

$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{2x_1 + 2x_2 + 2x_3}{2.(3)} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Resposta: a)Demonstração b) $m = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$.

Questão 9

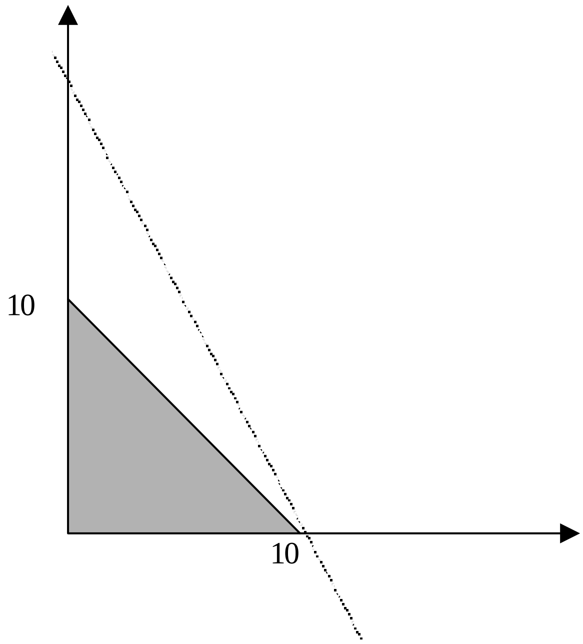
No plano cartesiano, considere o feixe de paralelas $2x + y = c$ em que $c \in R$.
a)Qual a reta do feixe com maior coeficiente linear que intercepta a região determinada pelas inequações:

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b)Quais as retas do feixe que tangenciam a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$?

RESOLUÇÃO

a)As inequações dadas determinam a região triangular da figura abaixo. A reta do feixe com maior coeficiente linear é a que passa pelo ponto (10,0).



Assim, impondo que a reta $2x + y = c$ passe pelo ponto (10,0), teremos:

$$2.(10) + 0 = c \;\Rightarrow\; c = 20.$$

Portanto, a reta procurada tem equação $2x + y = 20$.

b)O centro da circunferência é C(0,0) e o raio vale 1. Para que a reta do feixe tangencie a circunferência é necessário que a distância do centro à reta seja igual ao raio; isto é:

$$\frac{|2.(0)+(0)+c|}{\sqrt{2^2+1^2}}=1$$

e portanto, $|c|=\sqrt{5}$, ou seja , $c=\sqrt{5}$ ou $c=-\sqrt{5}$. Assim, as retas procuradas são:
$2x+y=\sqrt{5}$ $\quad e \quad$ $2x+y=-\sqrt{5}$.

Resposta: a) $2x+y=20$ b) $2x+y=\sqrt{5}$ $\quad e \quad$ $2x+y=-\sqrt{5}$.

Questão 10

Dado o polinômio $P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + k$:
a)Resolva a equação $P(x) = 0$, para $k = 8$.
b)Determine o valor de k de modo que as raízes estejam em progressão aritmética de razão igual a 3.

RESOLUÇÃO

a)A equação pode ser escrita sob a forma:

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x^2 - 4x + 8 = 0 \quad \text{e portanto}$$

$$x^2(x^2 + x - 2) - 4(x^2 + x - 2) = 0$$

$$(x^2 + x - 2)(x^2 - 4) = 0$$

Logo:

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad (\text{ raízes 1 e} -2)$$

ou

$$x^2 - 4 = 0 \quad (\text{ raízes} -2 \text{ e } 2)$$

Em resumo, o conjunto solução é $S = \{-2,1,2\}$.

b)Indiquemos as raízes em PA de razão 3 por: $r, r+3, r+6, r+9$. O valor de r deve satisfazer as relações de Girard dadas abaixo:

$$\begin{cases} r + r + 3 + r + 6 + r + 9 = -1 \ (I) \\ r(r+3) + r(r+6) + r(r+9) + (r+3)(r+6) + (r+3)(r+9) + (r+6)(r+9) = -6 \ (II) \\ (r+3)(r+6)(r+9) + r(r+6)(r+9) + r(r+3)(r+9) + r(r+3)(r+6) = 4 \ (III) \\ r(r+3)(r+6)(r+9) = k \ (IV) \end{cases}$$

De (I), obtemos $r = -\dfrac{19}{4}$.

Substituindo em (IV), obtemos $k = \dfrac{11\,305}{256}$

Porém ao substituirmos o valor de r em (II), o 1º membro dá $\dfrac{-354}{16} \neq -6$.

Assim, o sistema acima é impossível e portanto não existe k de modo que as raízes estejam em PA de razão 3.

Resposta: a) $S = \{-2,1,2\}$ b)Não existe valor de k satisfazendo a condição dada.