45. Numa turma com 40 alunos, sabe-se que 20% da turma já leu o livro "Quincas Borba" e 40% já leu o livro "Dom Casmurro". Podemos afirmar com certeza que:

A) algum aluno já leu os dois livros.
B) nenhum aluno leu os dois livros.
C) escolhidos 30 alunos quaisquer na turma, algum deles já leu "Quincas Borba".
D) mais de 20 alunos já leram algum dos livros.
E) escolhidos 25 alunos quaisquer na turma, algum deles já leu "Dom Casmurro".

Questão 45 – Alternativa E
Conjunto e Proporcionalidade: resposta (E)
Observe que 16 alunos da turma leram Dom Casmurro. Logo, escolhidos 25 alunos quaisquer, algum deles já leu este livro, caso contrário a turma teria mais de 40 alunos.

46. O número real x, positivo e diferente de 1, que satisfaz à equação
$\log_x (2x) \, . \, \log_2 x = 3 - \log_2 \sqrt{x}$ é igual a:

A) $\sqrt[3]{2}$
B) 2
C) $2\sqrt[3]{2}$
D) 4
E) $4\sqrt[3]{2}$

Questão 46 – Alternativa C
Funções, logaritmos e exponenciais: resposta (C)
Desenvolvendo

$$(\log_x 2 + \log_x x)\ \log_2 x = 3 - \frac{1}{2}\log_2 x \qquad \therefore \qquad 1 + \log_2 x = 3 - \frac{1}{2}\log_2 x.$$

Desta última igualdade segue que $\log_2 x = \frac{4}{3}$. Portanto, $x = 2^{\frac{4}{3}} = 2\sqrt[3]{2}.$

47. Na República Bruzundanga, o salário recebido pelo trabalhador sofre, na fonte pagadora, desconto de 25% a título de pagamento de imposto de renda. Além disso, um terço do valor pago na aquisição de bens e de serviços consiste também de impostos. Considerando-se apenas estes impostos, um bruzundanguense que recebe 12 salários brutos, iguais e mensais, ao longo de um ano, e que os gaste integralmente apenas em bens e serviços, no transcorrer do ano, paga de impostos, o equivalente ao seguinte número de salários brutos:

A) 1
B) 2
C) 5
D) 6
E) 8

Questão 47 – Alternativa D
Proporcionalidade: resposta (D)
Se x e i são o salário mensal e o imposto recolhido sobre este salário, respectivamente, temos que $i = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}(x - \frac{1}{4}x) = \frac{1}{2}x$. Portanto, metade do salário em cada mês é pago de impostos. Anualizando e fazendo a equivalência salário-mês, temos a resposta.

48. A elipse F do plano cartesiano xy obtida da elipse $E: x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 25 = 0$ por uma translação que leva os focos de E em pontos eqüidistantes da origem e sobre o eixo ox admite uma equação igual a:

A) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 18$
B) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 6$
C) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 16$
D) $x^2 + 2y^2 = 25$
E) $2x^2 + 3y^2 = 49$

Questão 48 – Alternativa A
Geometria Analítica Plana: resposta (A)
Completando o quadrado dos termos em x e y temos que $x^2 - 6x + 9 + 2(y^2 + 2y + 1) = 36 \therefore$ $(x-3)^2 + 2(y+1)^2 = 36$.
Aplicando a translação $x' = x - 3$ e $y' = y + 1$, segue imediatamente a resposta.

49. Os números complexos z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 são as raízes quínticas de 5 e $z_5 = \sqrt[5]{5}$ é a raiz quíntica real de 5. A soma $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ é igual a:

A) $-2\sqrt[5]{5}\,i$
B) $-\sqrt[5]{5}$
C) 0
D) i
E) $\frac{1}{\sqrt[5]{5}}$

Questão 49 – Alternativa B
Números complexos e polinômios: resposta (B)
Os números dados são as raízes do polinômio $p(z) = z^5 + 5$. Como o coeficiente de z^4 neste polinômio é zero e, por outro lado, este coeficiente é a soma $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5$, segue a resposta.

50. Num tetraedro ABCD vale a igualdade $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = a$ e o triângulo ABC é eqüilátero com $\overline{AB} = b$. O comprimento da altura do tetraedro baixada do vértice A é igual a:

A) $\dfrac{a+b}{2}$

B) $\sqrt{ab}$

C) $\dfrac{b\sqrt{3a^2 - b^2}}{a}$

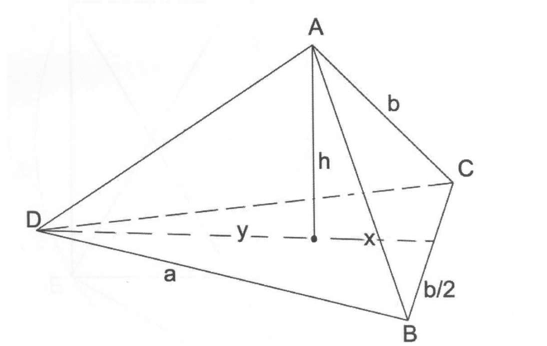
D) $b\dfrac{\sqrt{3a^2 - b^2}}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$

E) $a\dfrac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{\sqrt{a\ \ + b}}$

Questão 50 – Alternativa D

Geometria espacial: resposta (D)

Seja x a distância do pé da altura h ao lado do triângulo isósceles e seja y a distância do pé da perpendicular h ao vértice D do tetraedro. Pelo Teorema de Pitágoras temos as equações



$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{3b^2}{4} - h^2 \\ y^2 = a^2 - h^2 \\ (x+y)^2 = a^2 - \dfrac{b^2}{4} \end{cases}.$$

Eliminando as variáveis x e y na última equação obtemos o valor de h.

51. A razão $\dfrac{\text{área H}}{\text{área K}}$, onde H é o hexágono regular ABCDEF (com vértices nomeados no sentido horário) e K é o hexágono obtido pela interseção dos triângulos ACE e BDF, é igual a:

A) 2

B) 2,5

C) 3

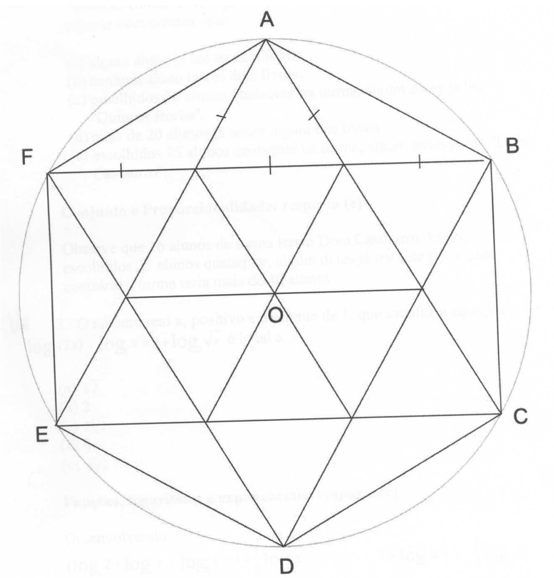
D) 3,5

E) 4

Questão 51 – Alternativa C

Geometria plana: resposta (C)

O hexágono H pode ser dividido em 18 triângulos: 12 triângulos eqüiláteros e congruentes dois a dois e outros 6 triângulos obtusos congruentes dois a dois. A área de um triângulo eqüilátero é igual à área de um triângulo obtuso pois ambos possuem o mesmo comprimento de base e o mesmo comprimento de altura. Por outro lado, o hexágono K é formado por seis triângulos eqüiláteros, portanto,



$$\frac{\textit{área } H}{\textit{área } K} = \frac{18}{6} = 3$$

52. Se $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e satisfaz a identidade matricial $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, então,

o valor correto de $\text{tg}\alpha$ é igual a:

A) 0

B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) 1

E) $\sqrt{3}$

Questão 52 – Alternativa B

Trigonometria e matrizes: resposta (B)

Observe que

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} \cos 5\alpha & -sen 5\alpha \\ sen 5\alpha & \cos 5\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Portanto, $5\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$ e $tg\alpha = tg\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.