

01. Os dois itens a seguir são relativos à reta $L: 2x - 3y + 1 = 0$ do plano cartesiano xy .

a. Determine a equação da reta M que contém o ponto $P(4,2)$ e que é perpendicular à reta L .

Solução (Geometria Analítica)

A reta L pode ser redefinida pela equação

$L: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Uma reta perpendicular a ela admite uma equação na forma $y = -\frac{3}{2}x + k$.

Como o ponto $P \in M$, substituindo as coordenadas P na equação, encontramos $M: 3x + 2y - 16 = 0$.

b) Determine a equação da reta N que contém o ponto $P(4,2)$ e que é paralela à reta L .

Solução (Geometria Analítica)

Uma reta paralela a L admite uma equação na forma $N: 2x - 3y + p = 0$. Como o ponto P pertence à reta N , substituindo as coordenadas de P na equação, encontramos $N: 2x - 3y - 2 = 0$

02. Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ onde a , b e c são números reais. Determine $f(-2)$ sabendo que $f(1) = 0$, $f(-1) = 2$ e que $f(2) = 14$.

Solução (Sistemas lineares)

Os valores da função nos dá o sistema linear

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + b - c = 2 \\ 8a + 4b + 2c = 14 \end{cases}$$

A soma da primeira com a segunda equação segue que $b = 1$. Dividindo a última equação 2 e substituindo o valor de b obtido temos que

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ 4a + c = 5 \end{cases}$$

Por subtração da 2ª equação pela 1ª chegamos ao valor $a = 2$. Logo, $c = -3$ e $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$. Finalizando, $f(-2) = -16 + 4 + 6 = -6$.

03. Determine os valores do ângulo x , em radianos, $0 \leq x \leq 2\pi$, tais que $\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = -1$.

Solução (Equações trigonométricas)

Dividindo ambos os membros da equação por 2 concluímos as igualdades

$$-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Sendo assim, valem as congruências modulo 2π :

$$x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}.$$

No intervalo considerado temos as soluções $x = \pi$ e $x = \frac{5\pi}{3}$.

04. A seqüência de números inteiros positivos $a_1 = 1$, a_2 , a_3 está em progressão aritmética com razão positiva. Calcule o menor valor de $a_1 + a_2 + a_3$ para que a equação $a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ tenha duas raízes reais e distintas.

Solução (Seqüência aritmética)

Escrevamos $a_2 = 1 + r$ e $a_3 = 1 + 2r$, onde $r \geq 1$ é a razão da progressão aritmética. Sendo assim, a equação é reescrita como $x^2 + (1+r)x + (1+2r) = 0$ e para que ela tenha duas raízes reais e distintas é necessário e suficiente que o discriminante seja positivo, ou seja,

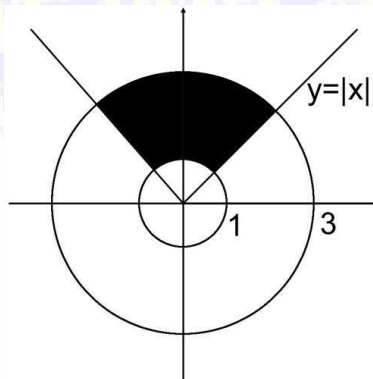
$$\Delta = (1+r)^2 - 4(1+2r) = r^2 - 6r - 3 > 0.$$

Desejamos minimizar $a_1 + a_2 + a_3 = 3 + 3r$. Para isto, precisamos encontrar o menor inteiro positivo $r \geq 1$ tal que $\Delta > 0$. O primeiro inteiro para o qual a desigualdade ocorre é $r = 7$. Logo, $a_1 + a_2 + a_3 = 24$.

05. Calcule a área da região R do plano cartesiano xy , onde $R = \{P(x, y); y \geq |x| \text{ e } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Solução (Relação binária)

A região descrita analiticamente é um quarto de um anel centrado na origem cujo raio menor tem comprimento 1 e o raio maior comprimento 3. Logo, a área ρ da região é:

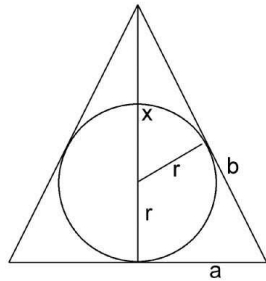


$$\rho = \frac{1}{4}(\pi 3^2 - \pi 1^2) = 2\pi.$$

06. Calcule o comprimento do raio $r > 0$ da esfera inscrita num cone circular reto cujo raio da base mede $a = 5$ e a geratriz mede $b = 7$ (Utilize cm como unidade de comprimento).

Solução (Geometria Espacial)

O problema reduz-se a calcular o raio da circunferência inscrita num triângulo isósceles com base $2a > 0$ e lados congruentes de medida b . Por semelhança de triângulos obtemos a igualdade



$$\frac{x}{r} = \frac{b}{a} \Rightarrow \left(x = \frac{b}{a} r \right).$$

O Teorema de Pitágoras nos dá a relação $b^2 = (x + r)^2 + a^2$. Substituindo o valor de x nesta última identidade chegamos a

$$b^2 = \left(\frac{b}{a} r + r \right)^2 + a^2.$$

Explicitando o valor de r temos que

$$r = a \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{(b + a)^2}} = 5 \sqrt{\frac{24}{144}} = 5 \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

07. Determine todas as raízes reais do polinômio $P(x) = (x^8 - 1)(x^2 + 4)(x^3 + x^2 - 12x)$.

Solução (Polinômios)

A questão resume-se em encontrar as raízes reais de cada um dos três fatores.

a) Primeiro fator:

$$(x^8 - 1) = (x^4 + 1)(x^4 - 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) = 0$$

Como as soluções das equações $(x^4 + 1) = 0$ e $(x^2 + 1) = 0$ não são reais, as raízes procuradas ficam sendo $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

b) O segundo fator não admite raízes reais.

c) Terceiro fator:

$$(x^3 + x^2 - 12x) = (x - 0)(x^2 + x - 12) = (x - 0)(x - 3)(x + 4) = 0.$$

Raízes reais: $x_3 = 0$, $x_4 = 3$ e $x_5 = -4$.

08. Seja z um número complexo diferente de zero tal que $z + \frac{1}{z} = -1$. Determine o valor de

$$z^{2005} + \frac{1}{z^{2005}}.$$

Solução (Fórmula de De Moivre)

A equação dada é equivalente à equação $z^2 + z + 1 = 0$. Portanto, as raízes são

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)i,$$

e

$$z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)i$$

Examinemos z_1 . Pela fórmula de De Moivre seguem as igualdades

$$z_1^{2005} = \cos\left(2005 \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(2005 \frac{2\pi}{3}\right)i = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)i = z_1,$$

(as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π e $2005 = 668 \cdot 3 + 1$). Logo,

$$z_1^{2005} + \frac{1}{z_1^{2005}} = z_1 + \frac{1}{z_1} = -1.$$

Da mesma forma, mostramos que $z_2^{2005} = z_2$. Sendo assim,

$$z_2^{2005} + \frac{1}{z_2^{2005}} = z_2 + \frac{1}{z_2} = -1.$$