1ª Parte – Questões Objetivas

Matemática

11 d

A companhia de eletricidade informou que para cada hora de um mês de 30 dias, um bairro ficou, em média, 0,2 horas sem energia elétrica em algumas ruas. No mesmo período, uma residência localizada nesse bairro totalizou 18 horas sem energia elétrica. Em relação ao total de horas que alguma parte do bairro ficou sem eletricidade, o número de horas que essa residência ficou sem energia elétrica representa

a) 3,6%. b) 9%. c) 12%. d) 12,5%. e) 33,3%.

Resolução

1) Em 30 dias, existem 30 . 24 horas = 720 horas.

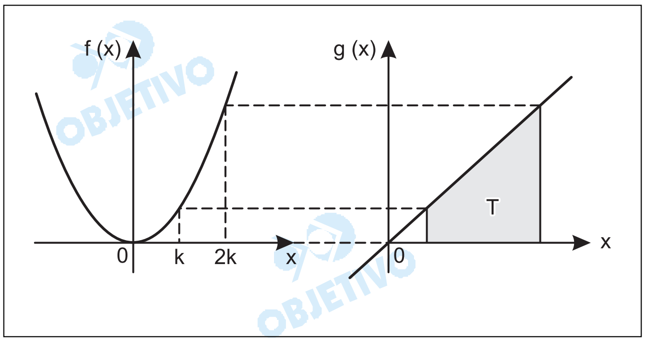
2) Para cada uma dessas 720 horas, houve corte de energia em algumas ruas do bairro, em média, durante 0,2 hora, totalizando 720 . 0,2h = 144h sem energia em algumas ruas.

3) A residência que totalizou 18 horas sem energia elétrica ficou sem energia $\dfrac{18h}{144h} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

do total de horas do "corte de fornecimento" de energia.

12 e

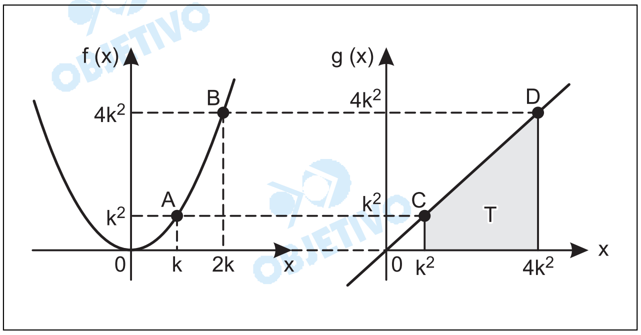
A figura representa, em sistemas coordenados com a mesma escala, os gráficos das funções reais f e g, com $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.



Sabendo que a região poligonal T demarca um trapézio de área igual a 120, o número real k é

a) 0,5. b) 1. c) $\sqrt{2}$ d) 1,5. e) 2.

Resolução



Na função $f(x) = x^2$, os pontos A e B têm coordenadas $A(k; k^2)$ e $B(2k; 4k^2)$.

Na função $g(x) = x$, os pontos C e D terão coordenadas $C(k^2; k^2)$ e $D(4k^2; 4k^2)$.

Sendo 120 a área da região T, temos:

$$\frac{(4k^2 + k^2) \cdot 3k^2}{2} = 120 \Leftrightarrow k^4 = 16 \Leftrightarrow k = 2 \text{ (pois } k > 0)$$

13 d

A figura 1 representa um determinado encaixe no plano de 7 ladrilhos poligonais regulares (1 hexágono, 2 triângulos, 4 quadrados), sem sobreposições e cortes.

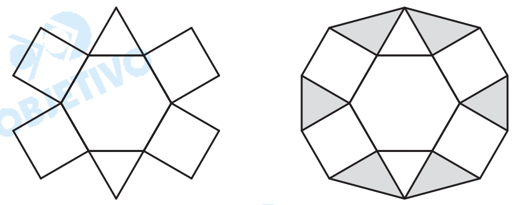
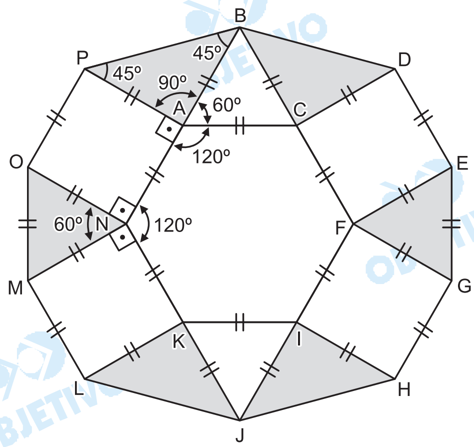


figura 1 figura 2

Em relação aos 6 ladrilhos triangulares colocados perfeitamente nos espaços da figura 1, como indicado na figura 2, é correto dizer que

a) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 15°.
b) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 30°.
c) 2 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 50° e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 30°.
d) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos retângulos isósceles.
e) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos escalenos.

Resolução



Sendo ABC e IJK triângulos eqüiláteros, CDEF, FGHI, KLMN e NOPA quadrados e ACFIKN um hexágono regular, tem-se:

1) Todos os segmentos apresentados na figura 1 são côngruos.

2) $B\hat{A}P = B\hat{C}D = H\hat{I}J = L\hat{K}J = 90°$ *e* $E\hat{F}G = M\hat{N}O = 60°$.

3) Os triângulos BAP, BCD, HIJ e LKJ são retângulos e isósceles, com ângulos da base medindo 45°.

4) Os triângulos EFG e MNO são eqüiláteros, pois são isósceles com o ângulo de 60°.

Desta forma, dois dos triângulos assinalados são eqüiláteros e quatro são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 45°.

14 b

Juntam-se 27 cubos brancos, cada um com 1 cm^3 de volume, formando um cubo de 27 cm^3. Em seguida, pinta-se de preto cada uma das seis faces do cubo de 27 cm^3, como indica a figura 1.

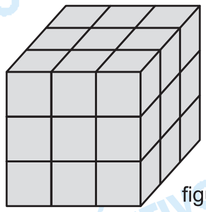
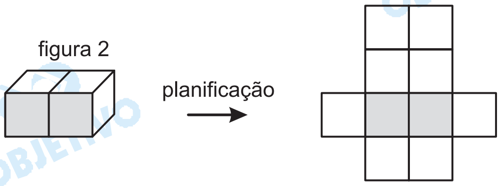


figura 1

Separa-se novamente os 27 cubos. Aleatoriamente e de uma única vez, 2 desses cubos são sorteados. Com os cubos sorteados, deseja-se formar um paralelepípedo de 2 cm^3 com cinco faces brancas e apenas uma preta, da forma indicada na figura 2.

figura 2



A probabilidade de que esse paralelepípedo possa ser formado com os cubos sorteados é igual a

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{17}{39}$ c) $\frac{29}{117}$ d) $\frac{2}{9}$ e) $\frac{5}{117}$

Resolução

1) *O número total de maneiras de escolher aleatoriamente dois cubos é $C_{27,2}$.*

2) *Para obter um paralelepípedo de 2 cm^3, com 5 faces brancas e apenas uma preta, podemos escolher:*
   a) *dois cubos com apenas uma face preta cada um; neste caso, o número total de resultados é $C_{6,2}$.*
   b) *dois cubos com apenas duas faces pretas cada um; neste caso, o número total de resultados é $C_{12,2}$.*
   c) *um cubo com apenas uma face preta e outro com apenas duas faces pretas; neste caso, o número total de resultados é 6 . 12.*

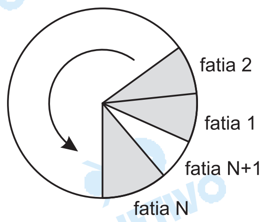
3) *A probabilidade pedida é, portanto,*

$$\frac{C_{6,2} + C_{12,2} + 6 \cdot 12}{C_{27,2}} = \frac{15 + 66 + 72}{\frac{27 \cdot 26}{2}} =$$

$$= \frac{153}{13 \cdot 27} = \frac{17}{13 \cdot 3} = \frac{17}{39}$$

15 c

Uma pizza circular será fatiada, a partir do seu centro, em setores circulares. Se o arco de cada setor medir 0,8 radiano, obtém-se um número máximo N de fatias idênticas, sobrando, no final, uma fatia menor, que é indicada na figura por fatia N+1.



Considerando π = 3,14, o arco da fatia N+1, em radiano, é

a) 0,74. b) 0,72. c) 0,68.
d) 0,56. e) 0,34.

Resolução

Para π = 3,14, tem-se que:

$$2\pi = 2 \cdot 3,14 = 6,28$$

e

$$6,28 = 7 \cdot 0,8 + 0,68$$

Conclui-se então que existem 7 fatias cujos arcos medem 0,8 rad e mais uma fatia cujo arco mede 0,68 rad.

16 a

Em notação científica, um número é escrito na forma $p.10^q$, sendo p um número real tal que $1 \le p < 10$, e q um número inteiro. Considerando log 2 = 0,3, o número 2^{255}, escrito em notação científica, terá p igual a

a) $\sqrt{10}$. b) $\sqrt{3}$. c) $\sqrt{2}$. d) 1,2. e) 1,1.

Resolução

Seja $N = 2^{255} = p \cdot 10^q$, com $1 \le p < 10$ e $q \in \mathbb{Z}$.

Como $\log N = \log 2^{255} = 255 \cdot \log 2 \simeq 255 \cdot 0,3 = 76,5$, tem-se:

$N = 10^{76,5} = 10^{0,5} \cdot 10^{76} = \sqrt{10} \cdot 10^{76} = p \cdot 10^q$

Desta forma, $p = \sqrt{10}$ e $q = 76$

17 a

Os únicos zeros da função polinomial f são –1 e 1, ambos de multiplicidade 1. Sabe-se que o conjunto dos opostos de cada imagem positiva de f está contido no conjunto das imagens negativas de f. Se g é a função dada por $g(x) = \sqrt{x}$, o domínio de g(f(x)) é o conjunto

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1\}$.

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -1 \text{ ou } x \ge 1\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 1\}$.

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -1\}$.

Resolução

Seja f(x) a função polinomial definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, na qual os únicos zeros são – 1 e 1, ambos de multiplicidade 1, então $f(x) = a \,.\, (x + 1) \,.\, (x - 1)$.

Se o conjunto dos opostos de cada imagem positiva de f está contido no conjunto das imagens negativas de f, então a parábola que representa a função f(x) está com sua concavidade voltada para baixo e, portanto, com $a < 0$.

Para $g(x) = \sqrt{x}$, a função g(f(x)) resulta:

$g(f(x)) = \sqrt{a \,.\, (x+1).(x-1)}$, cujo domínio é o conjunto dos valores reais de x, tais que:

$a \,.\, (x + 1).(x - 1) \ge 0 \Leftrightarrow$

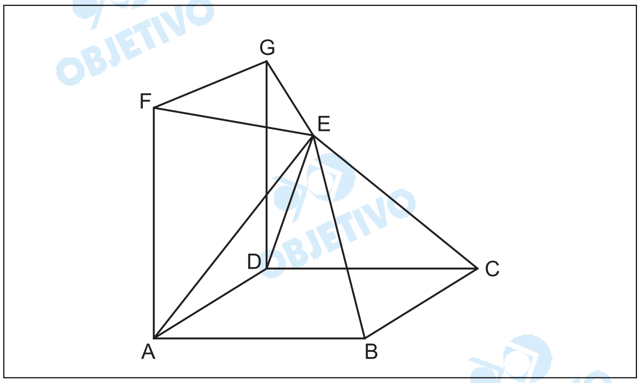
$\Leftrightarrow (x + 1) \,.\, (x - 1) \le 0 \text{ (pois } a < 0) \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

Portanto, o domínio de g(f(x)) é o conjunto

$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1\}$

18 c

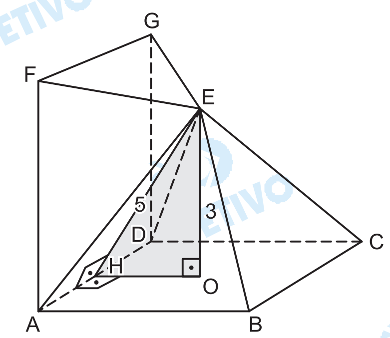
As bases ABCD e ADGF das pirâmides ABCDE e ADGFE são retângulos e estão em planos perpendiculares. Sabe-se também que ABCDE é uma pirâmide regular de altura 3 cm e apótema lateral 5 cm, e que ADE é face lateral comum às duas pirâmides.



Se a aresta AF é 5% maior que a aresta AD, então o volume da pirâmide ADGFE, em cm^3, é

a) 67,2. b) 80. c) 89,6. d) 92,8. e) 96.

Resolução



No triângulo EOH, temos:

$(OH)^2 + (OE)^2 = (EH)^2 \Leftrightarrow (OH)^2 + 3^2 = 5^2 \Leftrightarrow OH = 4$

Como a pirâmide ABCDE é regular, temos:

$AB = AD = 2 \,.\, OH = 2 \,.\, 4 = 8$

Do enunciado, temos:

$AF = 1{,}05 \,.\, AD = 1{,}05 \,.\, 8 = 8{,}4$

Assim, o volume V da pirâmide ADGFE, em cm^3, é:

$$V = \frac{1}{3} \,.\, (AD) \,.\, (AF) \,.\, (OH) = \frac{1}{3} \,.\, 8 \,.\, 8{,}4 \,.\, 4 = 89{,}6$$

19 c

Seja A = (a_{ij}) uma matriz quadrada de ordem 3 tal que,

$a_{ij} = \begin{cases} p, \text{ se } i = j \\ 2p, \text{ se } i \neq j \end{cases}$ com p inteiro positivo. Em tais condições, é correto afirmar que, necessariamente, det A é múltiplo de

a) 2. b) 3. c) 5. d) 7. e) 11.

Resolução

I) Sendo A = (a_{ij}) uma matriz quadrada de ordem 3 tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} p, \text{ se } i = j \\ 2p, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

com p inteiro positivo, então:

$$A = \begin{bmatrix} p & 2p & 2p \\ 2p & p & 2p \\ 2p & 2p & p \end{bmatrix}$$

$$\text{II) } \det A = \begin{vmatrix} p & 2p & 2p \\ 2p & p & 2p \\ 2p & 2p & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5p & 2p & 2p \\ 5p & p & 2p \\ 5p & 2p & p \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \,.\, \begin{vmatrix} p & 2p & 2p \\ p & p & 2p \\ p & 2p & p \end{vmatrix}$$ *, que é múltiplo de 5, pois* $p \in \mathbb{Z}_+$

20 e

Sejam i a unidade imaginária e a_n o n-ésimo termo de uma progressão geométrica com $a_2 = 2a_1$. Se a_1 é um número ímpar, então $i^{a_1} + i^{a_2} + i^{a_3} + \dots i^{a_{10}}$ é igual a

a) 9i ou – 9i. b) – 9 + i ou – 9 – i.
c) 9 + i ou 9 – i. d) 8 + i ou 8 – i.
e) 7 + i ou 7 – i.

Resolução

1) Se ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, \dots$) for uma PG de razão 2, então

$$i^{a_1} + i^{a_2} + i^{a_3} + \dots + i^{a_{10}} = i^{a_1} + (i^{a_1})^2 + (i^{a_1})^4 + \dots + (i^{a_1})^{512}$$

2) Se a_1 for um número inteiro ímpar, então

$$a_1 = 2k + 1, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

3) $i^{a_1} = i^{2k+1} = i^{2k} \,.\, i = \pm 1 \,.\, i = \pm i$

4) $i^{a_1} + i^{a_2} + i^{a_3} + \dots + i^{a_{10}} = (\pm i)^1 + (\pm i)^2 + (\pm i)^4 + \dots +$

$$+ (\pm i)^{512} = \pm i - 1 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{8 \text{ parcelas}} = \pm i + 7$$

Matemática

36

Ao iniciar uma viagem de São Paulo para o Rio de Janeiro, Pedro abasteceu o tanque de combustível do carro, que estava totalmente vazio, até o limite máximo, pagando pelo abastecimento R$ 111,80. Após percorrer 180 km da viagem, Pedro parou em outro posto para completar o combustível do tanque até o limite máximo, gastando agora R$ 24,75. Sabe-se que a distância do ponto de partida de Pedro, em São Paulo, até a cidade do Rio de Janeiro é igual a 480 km, que o tanque de combustível do carro de Pedro tem capacidade total de 52 litros, e que seu carro percorre na estrada, em média, 16 km por litro de combustível.

a) Qual é o preço do litro de combustível em cada um dos dois postos em que Pedro abasteceu o carro?

b) Sem novos abastecimentos, quantos quilômetros, no máximo, o carro de Pedro poderá percorrer na cidade do Rio de Janeiro, sabendo-se que em trecho de cidade seu carro faz, em média, 12 km por litro de combustível?

Resolução

1) No primeiro posto, o preço do litro de combustível é

$$\frac{R\$\ 111{,}80}{52} = R\$\ 2{,}15.$$

2) Para percorrer os 180 km iniciais, o carro de Pedro consumiu $\frac{180\ km}{16\ km/\ell} = 11{,}25\ell$.

3) Quando completou o tanque no segundo posto, Pedro pagou R$ 24,75 por 11,25ℓ de combustível. Portanto, pagou $\frac{R\$\ 24{,}75}{11{,}25} = R\$\ 2{,}20$ *o litro.*

4) Para completar a viagem, o carro de Pedro deverá consumir $\frac{480km - 180\ km}{16km/\ell} = 18{,}75\ell$.

Restarão no tanque (52 – 18,75)ℓ = 33,25ℓ e o carro de Pedro poderá percorrer, na cidade do Rio de Janeiro, 33,25ℓ . 12 km/ℓ = 399 km, no máximo.

Respostas: *a) R$ 2,25 e R$ 2,20*
b) 399 km

No dia do pagamento, Rita e Luís compraram, cada um, x CDs e y DVDs em uma loja ($x \neq 0$ e $y \neq 0$). Cada CD comprado por Rita custou R$ 20,00, e cada DVD comprado por ela custou R$ 30,00. Cada CD comprado por Luís custou R$ 15,00, e cada DVD custou P reais ($P \neq 0$). Sabe-se que essa foi a única compra que Rita e Luís fizeram na loja, gastando R$ 150,00 e Q reais ($Q \neq 0$), respectivamente.

a) Determine o par ordenado (x,y) da solução do problema quando $x \neq y$.

b) Se o preço de cada DVD comprado por Luís corresponde a 20% do seu gasto total na loja, determine P e Q quando a solução do problema é $x = y$.

Resolução

a) Sendo x e y dois números naturais e diferentes de zero, de acordo com o enunciado, temos o sistema:

$$\begin{cases} 20x + 30y = 150 \\ 15x + Py = Q \end{cases}$$

Devemos notar que $20x + 30y = 150 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x + 3y = 15$ e os únicos pares (x;y) de números naturais que satisfazem essa igualdade são (3;3) e (6;1).

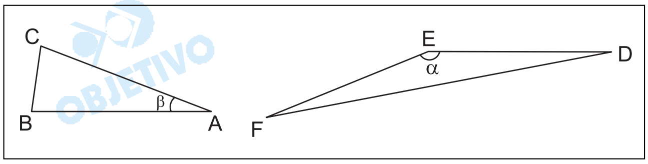
Para $x \neq y$, o par ordenado solução do problema é (6;1).

b) Se a solução do problema é o par (x;y) = (3;3), então
$15.3 + P.3 = Q \Leftrightarrow Q = 3P + 45$
Sendo $P = 20\% \,.\, Q = 0{,}2Q$, temos
$Q = 3 \,.\, 0{,}2Q + 45 \Leftrightarrow Q = 112{,}5$
Logo, $P = 0{,}2 \,.\, 112{,}5 = 22{,}5$

Respostas: *a) (6;1)*
b) $P = 22{,}5$ e $Q = 112{,}5$

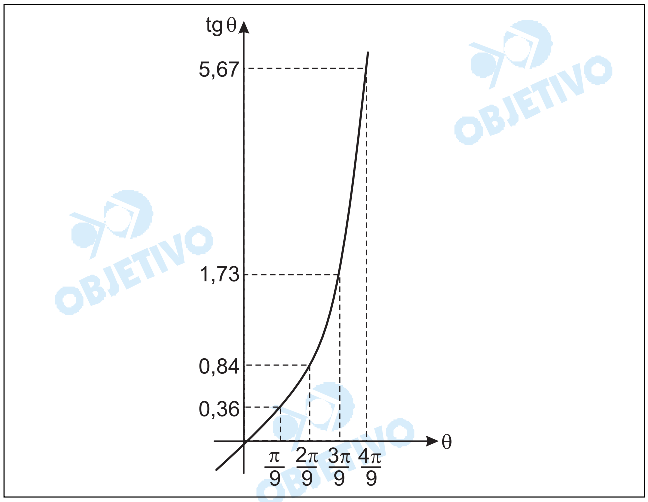
38

As figuras indicam um triângulo acutângulo ABC e um triângulo obtusângulo DEF, sendo α um ângulo obtuso. Sabe-se ainda que AB = AC = ED = EF = 1 e que β + α = 180º.



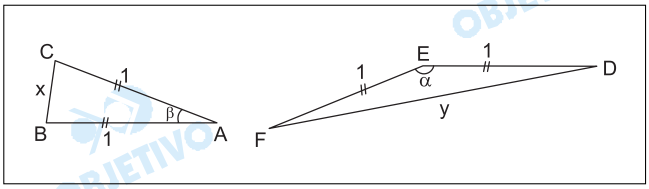
a) Denotando BC por x e DF por y, faça o gráfico do lugar geométrico dos pontos (x,y) no plano cartesiano.

b) Calcule a razão do maior lado do triângulo DEF pelo menor lado do triângulo ABC quando β = 20º.



Resolução

a) A partir do enunciado, temos os triângulos indicados abaixo, nos quais α + β = 180° e α é um ângulo obtuso.

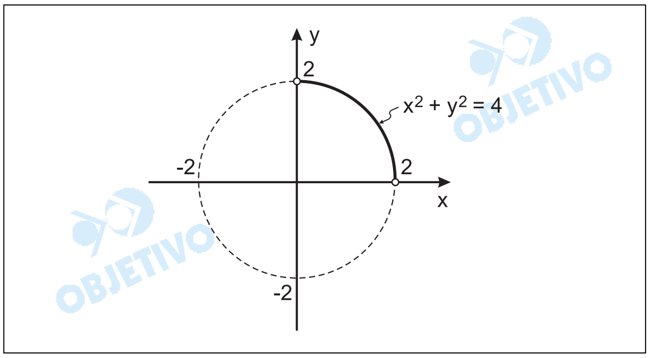


Aplicando-se a lei dos cossenos aos triângulos, temos:

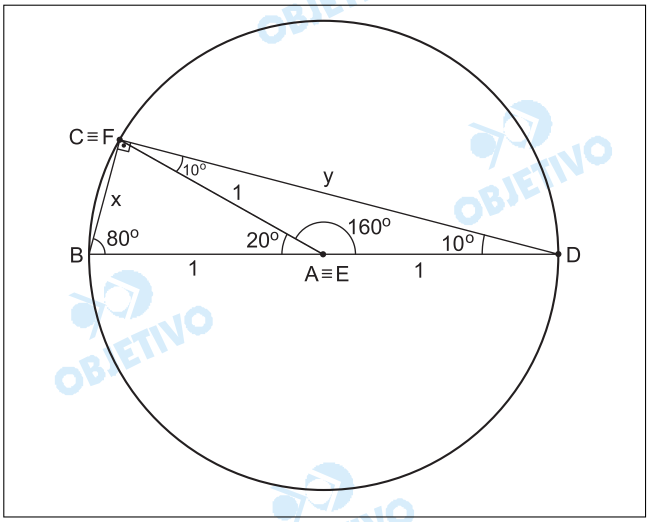
I) $x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\beta = 2 - 2 \cdot \cos\beta$

II) $y^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha =$
$= 2 - 2 \cdot \cos\alpha = 2 - 2 \cdot \cos(180° - \beta) =$
$= 2 + 2 \cdot \cos\beta$

Na soma de (I) com (II), obtemos o lugar geométrico dos pontos (x;y), resultando $x^2 + y^2 = 4$, *que representa um arco de circunferência de centro na origem e raio igual a 2, com* $x > 0$ *e* $y > 0$, *portanto, o gráfico procurado é:*



b) Juntando-se os dois triângulos dados, resulta a figura



A razão do maior lado do triângulo DEF pelo menor lado do triângulo ABC, para $\beta = 20°$, é $\dfrac{y}{x} = \text{tg } 80°$, pois o triângulo BDC é retângulo em C.

Do gráfico, concluímos que

$$\frac{y}{x} = \text{tg } 80° = \text{tg } \frac{4\pi}{9} = 5,67$$

Respostas: a) gráfico
b) 5,67

39

No volante do jogo da LOTECA, para cada um dos 14 jogos de futebol indicados, o apostador deverá marcar o seu palpite, que pode ser coluna 1, coluna 2 ou coluna do meio (vitória do time 1, vitória do time 2 ou empate, respectivamente).
Quando o jogador assinala apenas uma das três colunas em um jogo, dizemos que ele assinalou palpite simples nesse jogo.
Dependendo do valor disponível para a aposta e de limites de aposta por volante, o jogador também poderá marcar alguns palpites duplos e/ou triplos. Em um palpite duplo, como por exemplo, colunas 1 e do meio, o apostador só errará o jogo se o resultado final for coluna 2. Em um palpite triplo (colunas 1, 2 e do meio), o apostador sempre acertará o jogo.
Em relação a um cartão da LOTECA com palpite duplo em um dos jogos e palpites simples nos demais, preenchido aleatoriamente, e supondo que as três colunas são igualmente possíveis em todos os jogos, pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade de esse cartão ser contemplado com o prêmio máximo, que corresponde ao acerto dos 14 jogos?
b) Qual é a probabilidade de esse cartão ser contemplado com o segundo prêmio, que corresponde ao acerto de pelo menos 13 jogos?

Dado:

x	10	11	12	13	14	15	16
3^x	59049	177147	531441	1594323	4782969	14348907	43046721

Resolução

a) *Admitindo-se que o cartão tenha sido previamente preenchido com um jogo duplo e treze jogos simples, ainda que preenchidos aleatoriamente, a probabilidade desse cartão ser contemplado com o prêmio máximo é*

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13} = \frac{2}{3^{14}} = \frac{2}{4\,782\,969}$$

b) *A probabilidade de acertar exatamente treze dos quatorze jogos indicados (dos quais em apenas um deles foi assinalado uma dupla, todos os demais têm palpite simples) é*

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \frac{2}{3} \cdot 13 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13} =$$

$$= \frac{52}{3^{14}} + \frac{1}{3^{14}} = \frac{53}{3^{14}} = \frac{53}{4\,782\,969}$$

Admitindo-se que o cartão contemplado com o prêmio máximo também recebe o segundo prêmio, a probabilidade desse cartão ser contemplado com o segundo prêmio, correspondente ao acerto de pelo menos 13 jogos, é

$$\frac{53}{3^{14}} + \frac{2}{3^{14}} = \frac{55}{3^{14}} = \frac{55}{4\,782\,969}$$

Respostas: a) $\dfrac{2}{4\,782\,969}$

b) $\dfrac{55}{4\,782\,969}$

Seja A = (p, $\sqrt{3}$ p) um ponto de intersecção da reta (r) y = qx com a circunferência λ de centro C = (0,0), com p real e diferente de 0.

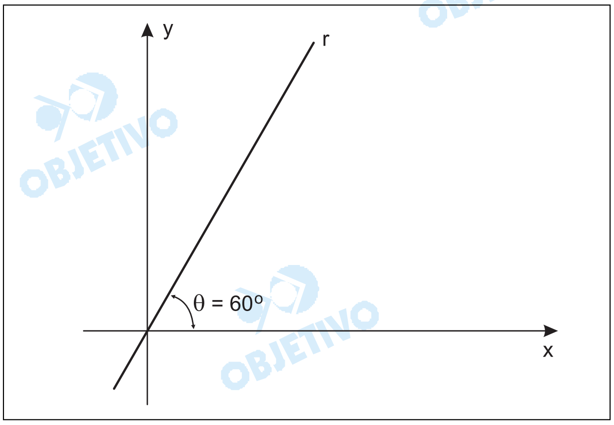
a) Construa o gráfico da reta r e determine seu ângulo de inclinação.

b) Sendo R a coroa circular definida pelas circunferências, com as características de λ, tais que $1 \le p \le 9$, calcule a área da região formada pela intersecção de R com $\{(x,y) \mid y \le qx\}$.

Resolução

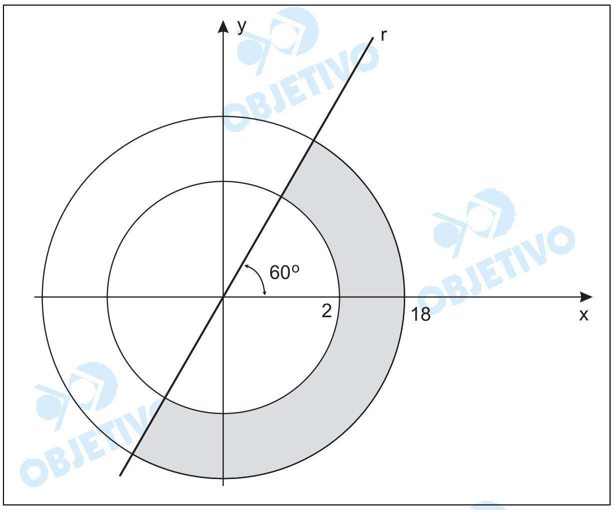
a) O ponto A(p; $\sqrt{3}$. p) é ponto da reta (r) y = q . x $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{3} \, . \, p = q \, . \, p \Leftrightarrow q = \sqrt{3}$

Sendo q = $\sqrt{3}$ *o coeficiente angular da reta* ***r****, temos:*
$q = tg\ \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60°$, *que é o ângulo de inclinação da reta* ***r****.*
O gráfico da reta ***r****, de equação y =* $\sqrt{3}$ *. x, é*



b) O ponto A(p; $\sqrt{3}$ *. p) é ponto da circunferência* $x^2 + y^2 = r^2$ *de centro na origem* $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p^2 + (\sqrt{3}\,p)^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 4p^2$.
A circunferência tem equação $x^2 + y^2 = 4p^2$

Sendo R a coroa circular definida pelas circunferências $x^2 + y^2 = 4p^2$, *com* $1 \le p \le 9$, *a área de R é igual a:*
$A = \pi \, . \, (18^2 - 2^2) = 320 \, . \, \pi$
Dessa maneira, a área da região formada pela intersecção da R com $\{(x; y) \mid y \le \sqrt{3} \, . \, x\}$ *resulta:*



Portanto: $A = \dfrac{320 \,.\, \pi}{2} = 160 \,.\, \pi$

Respostas: *a) gráfico e 60°*
b) 160π