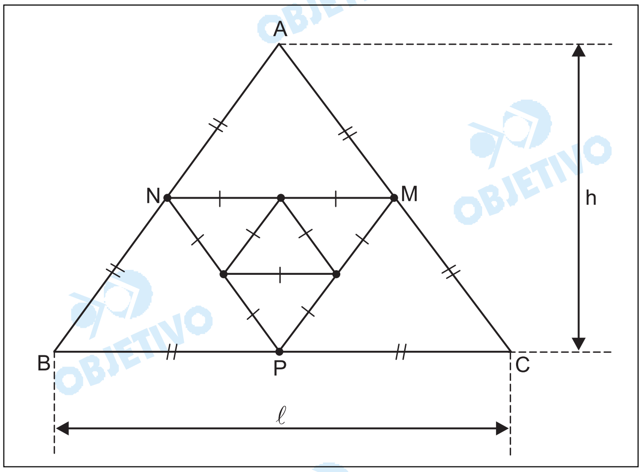
1

Considere um triângulo eqüilátero T_1 de área $16\sqrt{3}$ cm^2. Unindo-se os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se um segundo triângulo eqüilátero T_2, que tem os pontos médios dos lados de T_1 como vértices. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo obtém-se um terceiro triângulo eqüilátero T_3, e assim por diante, indefinidamente. Determine:

a) as medidas do lado e da altura do triângulo T_1, em centímetros;

b) as áreas dos triângulos T_2 e T_7, em cm^2.

Resolução



a) *O lado ℓ e a altura h do triângulo eqüilátero T_1, representado na figura por ABC, em cm, são tais que:*

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ e } h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = 8 \text{ e } h = 4\sqrt{3}$$

b) *As áreas dos triângulos T_1, T_2, T_3, ... formam uma progressão geométrica de primeiro termo $A_{T_1} = 16\sqrt{3}$ cm^2 e razão*

$$\frac{A_{T_2}}{A_{T_1}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Desta forma,

$$A_{T_2} = A_{T_1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 =$$

$$= 16\sqrt{3}\text{ cm}^2 \cdot \frac{1}{4} = 4\sqrt{3}\text{ cm}^2 \text{ e}$$

$$A_{T_7} = A_{T_1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 =$$

$$= 16\sqrt{3}\text{ cm}^2 \cdot \frac{1}{4096} = \frac{\sqrt{3}}{256}\text{ cm}^2$$

Respostas: *a) 8 cm e $4\sqrt{3}$ cm*

b) $4\sqrt{3}$ cm^2 e $\dfrac{\sqrt{3}}{256}$ cm^2

2

Considere os números complexos z = 2 – i e w = –3 –i, sendo i a unidade imaginária.

a) Determine z.w e $|w - z|$.

b) Represente z e w no plano complexo (Argand-Gauss) e determine $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, de modo que os números complexos z, w e t = bi sejam vértices de um triângulo, no plano complexo, cuja área é 20.

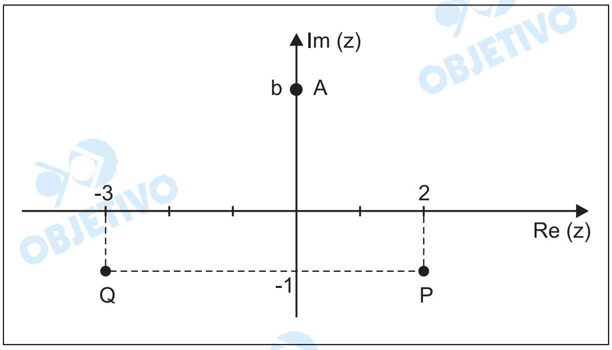
Resolução

Se z = 2 – i e w = – 3 – i então

a) $z \cdot w = (2 - i) \cdot (-3 - i) = -6 - 2i + 3i - 1 = -7 + i$

$|w - z| = |(-3 - i) - (2 - i)| = |-5| = 5$

b) *Sejam P, Q e A os afixos dos números complexos z = 2 – i, w = – 3 – i e t = bi, respectivamente.*



A área do triângulo APQ é 20 e portanto:

$$\frac{[2 - (-3)] \cdot [b - (-1)]}{2} = 20 \Leftrightarrow 5\,(b + 1) = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b + 1 = 8 \Leftrightarrow b = 7$$

Respostas: *a)* $z \cdot w = -7 + i$

$|w - z| = 5$

b) $b = 7$

3

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \frac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$.

O determinante de A é um polinômio p(x).

a) Verifique se 2 é uma raiz de p(x).

b) Determine todas as raízes de p(x).

Resolução

Sendo $A = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \frac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$, *então*

$\det A = p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

a) *2 é raiz de p(x), pois* $p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0$

b) $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \Leftrightarrow p(x) = x^2 \cdot (x - 2) - (x - 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p(x) = (x - 2) \cdot (x^2 - 1)$

As raízes de p(x) são tais que:

$x - 2 = 0$ *ou* $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ *ou* $x = \pm 1$

Respostas: *a) 2 é raiz, pois p(2) = 0*

b) As raízes de p(x) são: – 1; 1 e 2.

4

Considere todos os números formados por 6 algarismos distintos obtidos permutando-se, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

a) Determine quantos números é possível formar (no total) e quantos números se iniciam com o algarismo 1.

b) Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512346 e que número ocupa a 242ª posição.

Resolução

Seja A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

a) *A quantidade total de números de seis algarismos distintos que podem ser formados permutando-se os algarismos de A é $P_6 = 6! = 720$.*

Os números do item anterior, que começam com o algarismo 1 são os que se obtém permutando-se os algarismos {2;3;4;5;6} e, portanto, a quantidade total é $P_5 = 5! = 120$.

1					

b) *1) A quantidade de números de 5 algarismos do item anterior, cujo primeiro algarismo é 1 ou 2 ou 3 ou 4, é 4 . 120 = 480.*

2) Esses 480 números são todos menores que o número 512346.

3) O menor número de 6 algarismos do item (a) que começa com o algarismo 5 é o próprio 512346.

4) Escrevendo os números do item (a) em ordem crescente, a posição ocupada pelo número 512346 é a 481ª.

5) Existem 240 números cujo primeiro algarismo é 1 ou 2.

6) Os dois menores números cujo primeiro algarismo é 3 são 312456 e 312465.

7) Escrevendo todos os números de 6 algarismos do item (a) em ordem crescente, o número que ocupa a 242ª posição é 312465.

Respostas: *a) 720; 120*

b) 481ª; 312465

5

Joga-se um dado honesto. O número que ocorreu (isto é, da face voltada para cima) é o coeficiente b da equação $x^2 + bx + 1 = 0$. Determine

a) a probabilidade de essa equação ter raízes reais.

b) a probabilidade de essa equação ter raízes reais, sabendo-se que ocorreu um número ímpar.

Resolução

a) A equação $x^2 + bx + 1 = 0$ tem raízes reais $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow b \geq 2$, pois $b \in \mathbb{N}$ e $1 \leq b \leq 6$.
Portanto, $b \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.
No lançamento do dado honesto, a probabilidade de a equação admitir raízes reais é $\frac{5}{6}$.

*b) Sabendo-se que **b** é ímpar, então b = 1 ou b = 3 ou b = 5 e a probabilidade de a equação, nessas condições, admitir raízes reais é $\frac{2}{3}$.*

Respostas: *a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{2}{3}$.*

6

A reta r de equação $y = \dfrac{x}{2}$ intercepta a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{5}$ em dois pontos P e Q, sendo que as coordenadas de P são ambas positivas. Determine:

a) a equação da circunferência e os pontos P e Q;

b) a equação da reta s, perpendicular a r, passando por P.

Resolução

a) A equação da circunferência, com centro na origem e raio $\sqrt{5}$ é $x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$

Os pontos de intersecção da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e da reta de equação $y = \dfrac{x}{2}$ são obtidos a partir do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y)^2 + y^2 = 5 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Dessa forma as coordenadas dos pontos P e Q, são respectivamente, (2; 1) e (–2; –1), visto que as coordenadas de P são ambas positivas.

b) A reta (r) de equação $y = \dfrac{x}{2}$, tem coeficiente angular $m_r = \dfrac{1}{2}$ e a reta (s), perpendicular a (r) terá coeficiente angular m_s, tal que $m_s = \dfrac{-1}{m_r} = \dfrac{-1}{1/2} = -2$.

Portanto a equação da reta (s), que passa pelo ponto P (2; 1), com coeficiente angular – 2, é:

$$y - 1 = -2 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$$

Respostas: *a) $x^2 + y^2 = 5$; P(2; 1) e Q(–2; –1)*

b) $2x + y - 5 = 0$

7

Como resultado de uma pesquisa sobre a relação entre o comprimento do pé de uma pessoa, em centímetros, e o número (tamanho) do calçado brasileiro, Carla obteve uma fórmula que dá, em média, o número inteiro n (tamanho do calçado) em função do comprimento c, do pé, em cm.

Pela fórmula, tem-se n = [x], onde $x = \frac{5}{4} c + 7$ e [x] indica o menor inteiro maior ou igual a x. Por exemplo, se c = 9 cm, então x = 18,25 e n = [18,25] = 19. Com base nessa fórmula,

a) determine o número do calçado correspondente a um pé cujo comprimento é 22 cm.

b) se o comprimento do pé de uma pessoa é c = 24 cm, então ela calça 37. Se c > 24 cm, essa pessoa calça 38 ou mais. Determine o maior comprimento possível, em cm, que pode ter o pé de uma pessoa que calça 38.

Resolução

a) *Para um pé com 22 cm de comprimento o número do calçado é*

$$n = \left\lceil \frac{5}{4}.22 + 7 \right\rceil = [34,5] = 35$$

b) *A pessoa que calça 38 tem o comprimento c, em cm, do pé de forma que*

$$n = \left\lceil \frac{5}{4} . c + 7 \right\rceil = 38 \Leftrightarrow 37 < \frac{5}{4} . c + 7 \leq 38 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30 < \frac{5}{4} . c \leq 31 \Leftrightarrow 120 < 5 . c \leq 124 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 < c \leq 24,8$$

Desta forma, o maior comprimento possível, em cm, que pode ter o pé de uma pessoa que calça 38 é 24,8.

Respostas: *a) 35*

b) 24,8 cm

8

Considere as funções

$f(x) = \log_3(9x^2)$ e $g(x) = \log_3\left(\dfrac{1}{x}\right)$, definidas para todo $x > 0$.

a) Resolva as duas equações: $f(x) = 1$ e $g(x) = -3$.

b) Mostre que $1 + f(x) + g(x) = 3 + \log_3 x$.

Resolução

Sejam V_f e V_g os conjuntos-verdade das respectivas equações

a) Para $x > 0$ temos:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \log_3(9x^2) = 1 \Leftrightarrow 9x^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_f = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

$$g(x) = -3 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1}{x}\right) = -3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow x = 27 \Leftrightarrow V_g = \{27\}$$

b) $$1 + f(x) + g(x) = 1 + \log_3(9x^2) + \log_3\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= 1 + \log_3\left(9x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = 1 + \log_3(9x) =$$

$$= 1 + \log_3 9 + \log_3 x = 1 + 2 + \log_3 x = 3 + \log_3 x$$

Respostas: *a)* $V_f = \left\{ \dfrac{\sqrt{3}}{3} \right\}$ *e* $V_g = \{27\}$

b) demonstração

9

A temperatura, em graus celsius (°C), de uma câmara frigorífica, durante um dia completo, das 0 hora às 24 horas, é dada aproximadamente pela função:

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right),\ 0 \le t \le 24,$$

com t em horas. Determine:

a) a temperatura da câmara frigorífica às 2 horas e às 9 horas (use as aproximações $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$);

b) em quais horários do dia a temperatura atingiu 0 °C.

Resolução

a) A partir do enunciado, sendo f(t) em graus celsius (°C), temos:

$$f(2) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\ .\ 2\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\ .\ 2\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1,7 - 1}{2} = 0,35$$

$$f(9) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\ .\ 9\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\ .\ 9\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = -\frac{1,4}{2} = -0,7$$

b) Se f(t) = 0, temos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\ .\ t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\ .\ t\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\ .\ t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\ .\ t\right)$$

A igualdade é verificada, quando:

***1ª possibilidade**:* $\frac{\pi}{6}\ .\ t = \frac{\pi}{12}\ .\ t + n\ .\ 2\pi,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = n\ .\ 24,\ n \in \mathbb{Z}$

Para $0 \le t \le 24$, resulta t = 0 ou t = 24

***2ª possibilidade**:* $\frac{\pi}{6}\ .\ t = -\frac{\pi}{12}\ .\ t + n\ .\ 2\pi,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = n\ .\ 8,\ n \in \mathbb{Z}$

Para $0 \le t \le 24$, resulta t = 0 ou t = 8 ou t = 16 ou t = 24

Portanto, a temperatura atingiu 0°C nos seguintes horários:
0 hora
8 horas
16 horas
24 horas

Respostas: *a) f(2) = 0,35°C; f(9) = – 0,7°C*
b) 0h, 8h, 16h e 24h

10

Considere um cilindro circular reto de altura x cm e raio da base igual a y cm.

Usando a aproximação $\pi = 3$, determine x e y nos seguintes casos:

a) o volume do cilindro é 243 cm^3 e a altura é igual ao triplo do raio;

b) a área da superfície lateral do cilindro é 450 cm^2 e a altura tem 10 cm a mais que o raio.

Resolução

a) *O volume V do cilindro é dado por* $V = \pi \cdot y^2 \cdot x$.
Assim, para $V = 243\ cm^3$, $\pi = 3$ *e* $x = 3 \cdot y$ *temos*
$3 \cdot y^2 \cdot 3y = 243 \Leftrightarrow y^3 = 27 \Leftrightarrow y = 3$ *e, portanto,*
$x = 3 \cdot 3 = 9$

b) *A área lateral* A_L *do cilindro é dada por*
$A_L = 2 \cdot \pi \cdot y \cdot x$
Assim, para $A_L = 450\ cm^2$, $\pi = 3$ *e* $x = y + 10$ *temos:*
$2 \cdot 3 \cdot y\ (y + 10) = 450 \Leftrightarrow y^2 + 10y - 75 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 5$, *pois* $y > 0$
Logo, $x = y + 10 = 5 + 10 = 15$

Respostas: *a)* $x = 9$ *e* $y = 3$
b) $x = 15$ *e* $y = 5$

Comentário

Com questões bem enunciadas, quase todas relacionadas a algum problema prático e envolvendo dois ou mais assuntos do programa, a Banca Examinadora apresentou uma prova criativa e de bom nível.