Os candidatos que prestaram o ENEM podem utilizar a nota obtida na parte objetiva desse exame como parte da nota da prova de Conhecimentos Gerais da UNIFESP. A fórmula que regula esta possibilidade é dada por

$$NF = \begin{cases} 95\%\ CG + 5\%\ ENEM, \text{ se } ENEM > CG, \\ CG, \text{ se } ENEM \leq CG, \end{cases}$$

onde NF representa a nota final do candidato, ENEM a nota obtida na parte objetiva do ENEM e CG a nota obtida na prova de Conhecimentos Gerais da UNIFESP.

a) Qual será a nota final, NF, de um candidato que optar pela utilização da nota no ENEM e obtiver as notas CG = 2,0 e ENEM = 8,0?

b) Mostre que qualquer que seja a nota obtida no ENEM, se ENEM > CG então NF > CG.

Resolução

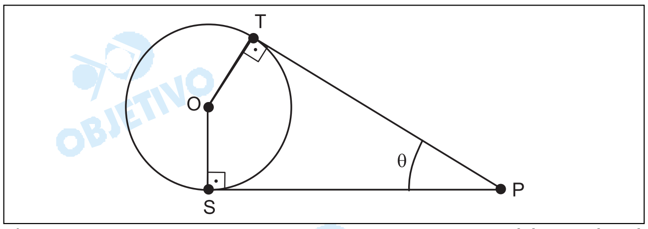
a) *Para o candidato que obteve CG = 2,0 e ENEM = 8,0, tem-se ENEM > CG e, portanto,*
NF = 95% . 2,0 + 5% . 8,0 = 1,9 + 0,4 = 2,3

b) *Se ENEM > CG, então*
NF = 95% . CG + 5% . ENEM > 95% . CG +
+ 5% . CG = 100% . CG ⇔ NF > CG

Respostas: *a) 2,3* *b) demonstração*

21

Um observador, em P, enxerga uma circunferência de centro O e raio 1 metro sob um ângulo θ, conforme mostra a figura.



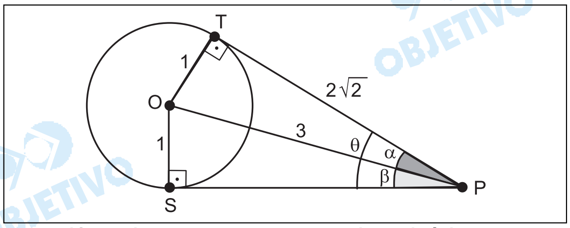
a) Prove que o ponto O se encontra na bissetriz do ângulo θ.

b) Calcule $tg(\theta)$, dado que a distância de P a O vale 3 metros.

Resolução

a) 1) *Nos triângulos retângulos OTP e OSP, temos:*

$(OP)^2 = 1^2 + (PT)^2 = 1^2 + (PS)^2 \Rightarrow PT = PS$



2) *Os triângulos OTP e OSP, pelo critério LLL, são côngruos e, portanto,*

$\alpha = \beta = \dfrac{\theta}{2} \Rightarrow \overrightarrow{OP}$ *é bissetriz do ângulo* θ

b) *Se OP = 3, então:*

1) $3^2 = 1^2 + (PT)^2 \Leftrightarrow (PT)^2 = 8 \Leftrightarrow PT = 2\sqrt{2}$

2) $tg\ \alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

3) $tg\ \theta = tg(2\alpha) = \dfrac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\alpha} =$

$= \dfrac{2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{4}}{1 - \dfrac{2}{16}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

Respostas: *a) demonstração*

b) $tg\ \theta = \dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

22

De um grupo de alunos dos períodos noturno, vespertino e matutino de um colégio (conforme tabela) será sorteado o seu representante numa gincana. Sejam p_n, p_v e p_m as probabilidades de a escolha recair sobre um aluno do noturno, do vespertino e do matutino, respectivamente.

Nº de alunos	**Período**
3	noturno
5	vespertino
x	matutino

a) Calcule o valor de x para que se tenha $p_m = \frac{2}{3}$.

b) Qual deve ser a restrição sobre x para que se tenha $p_m \geq p_n$ e $p_m \geq p_v$?

Resolução

a) Para que $p_m = \frac{2}{3}$*, devemos ter*

$$p_m = \frac{x}{3+5+x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x = 16 + 2x \Leftrightarrow x = 16$$

b) Para $x \in \mathbb{N}$*, tem-se*

$$p_m \geq p_n \Leftrightarrow \frac{x}{3+5+x} \geq \frac{3}{3+5+x} \Leftrightarrow x \geq 3$$

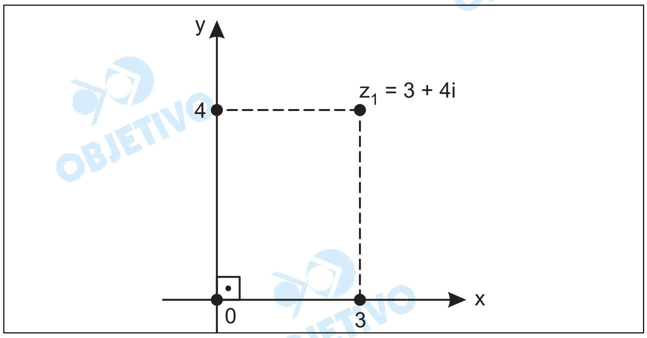
$$p_m \geq p_v \Leftrightarrow \frac{x}{3+5+x} \geq \frac{5}{3+5+x} \Leftrightarrow x \geq 5$$

Desta forma, $p_m \geq p_n$ *e* $p_m \geq p_v$ *se, e somente se,* $x \geq 5$*, com* $x \in \mathbb{N}$*.*

Respostas: *a) 16* *b)* $x \geq 5$ *e* $x \in \mathbb{N}$*.*

23

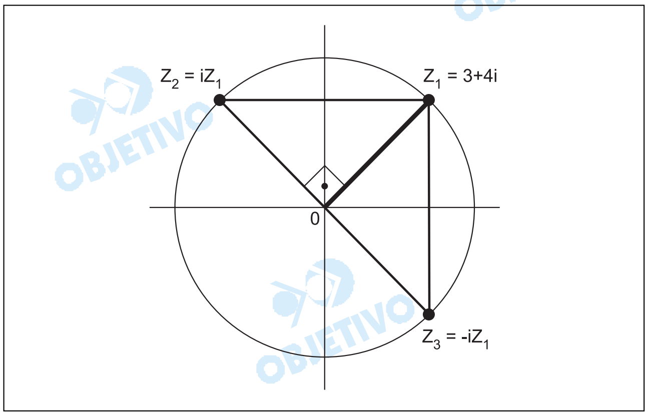
Dados os números complexos
$z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = iz_1$ e $z_3 = -\,iz_1$, calcule:



a) as coordenadas do ponto médio do segmento de reta determinado pelos pontos z_2 e z_3.

b) a altura do triângulo de vértices z_1, z_2 e z_3, com relação ao vértice z_1.

Resolução



Se $z_1 = 3 + 4i$, então:

a) 1) $z_2 = i \,.\, z_1 = i \,.\, (3 + 4i) = -4 + 3i$

2) $z_3 = -\,iz_1 = -\,i(3 + 4i) = 4 - 3i$

3) $\dfrac{z_2 + z_3}{2} = \dfrac{(-4 + 3i) + (4 - 3i)}{2} = 0$

4) O ponto médio do segmento de reta determinado pelos afixos dos complexos z_1 e z_2 é (0;0).

b) 1) z_1, z_2 e z_3 têm mesmo módulo.

2) Se $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ for o argumento de z_1, então o argumento de $z_2 = i\,z_1$ é $\theta + \dfrac{\pi}{2}$

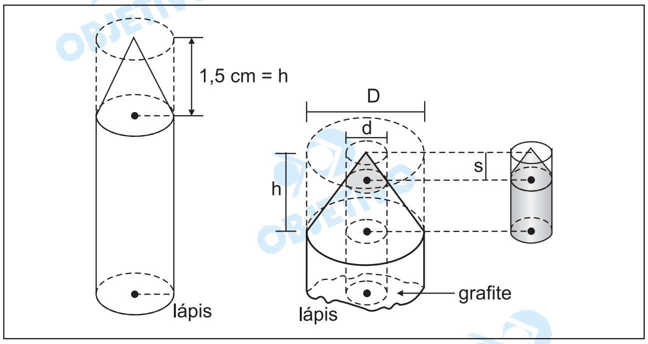
3) O argumento de $z_3 = -\,iz_1 = \dfrac{z_1}{i}$ é a primeira determinação positiva de $\theta - \dfrac{\pi}{2}$

4) O triângulo cujos vértices são os afixos de z_1, z_2 e z_3 é retângulo isósceles e a altura relativa ao “vértice z_1” é $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

***Respostas:** a) (0,0) b) 5*

24

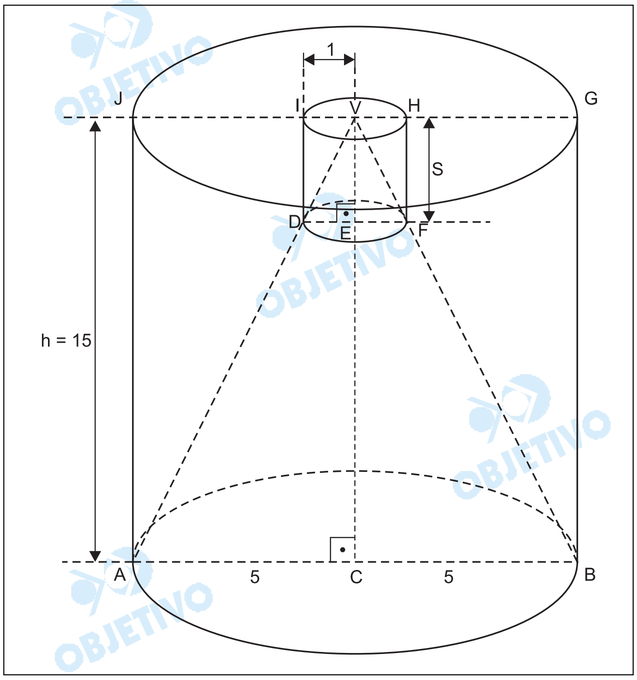
A figura representa um lápis novo e sua parte apontada, sendo que D, o diâmetro do lápis, mede 10 mm; d, o diâmetro da grafite, mede 2 mm e h, a altura do cilindro reto que representa a parte apontada, mede 15 mm. A altura do cone reto, representando a parte da grafite que foi apontada, mede s mm.



a) Calcule o volume do material (madeira e grafite) retirado do lápis.

b) Calcule o volume da grafite retirada.

Resolução



Da semelhança dos triângulos retângulos VAC e VDE, tem-se $\frac{VC}{AC} = \frac{VE}{DE} \Rightarrow \frac{15}{5} = \frac{s}{1} \Leftrightarrow s = 3$

a) *O volume do material retirado do lápis é o volume do cilindro ABGJ menos o volume do cone VAB e, portanto, em* mm^3*, igual a*

$$\pi \cdot 5^2 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15 = 375\pi - 125\pi = 250\pi$$

b) *O volume da grafite retirada é o volume do cilindro DFHI menos o volume do cone DFV e, portanto, em* mm^3*, igual a*

$$\pi \cdot 1^2 \cdot s - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot s = \frac{2\pi s}{3} = \frac{2\pi \cdot 3}{3} = 2\pi$$

Respostas: *a)* $250\pi\ mm^3$ *b)* $2\pi\ mm^3$

25

Dois produtos P_1 e P_2, contendo as vitaminas v_1 e v_2, devem compor uma dieta. A tabela apresenta a quantidade das vitaminas em cada produto. A última coluna fornece as quantidades mínimas para uma dieta sadia. Assim, para compor uma dieta sadia com x unidades do produto P_1 e y unidades do produto P_2, tem-se, necessariamente, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 4$ e $2x + y \geq 6$.

	P_1	P_2	
v_1	1	1	4
v_1	2	1	6

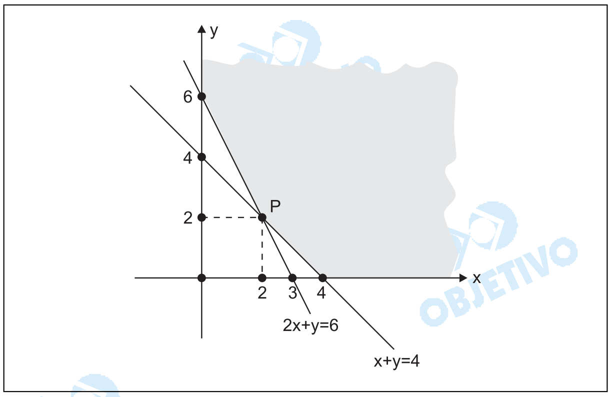
a) Mostre que com 1 unidade do produto P_1 e 3 unidades do produto P_2 não é possível obter-se uma dieta sadia.

b) Esboce a região descrita pelos pontos (x,y) que fornecem dietas sadias.

Resolução

a) Com uma unidade do produto P_1 e três unidades do produto P_2 não é possível obter uma dieta sadia, pois o número de unidades da vitamina v_2 é $2 . 1 + 1 . 3 = 5$ e o número mínimo necessário é 6.

b)



1) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2 \Leftrightarrow P\,(2;\,2)$

2) $x + y \geq 4$ é o semiplano limitado pela reta $x + y = 4$ e que não contém a origem.

3) $2x + y \geq 6$ é o semiplano limitado pela reta $2x + y = 6$ e que não contém a origem.

4) A região descrita pelos pontos (x, y) que fornece dietas sadias, definida por $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ 2x + y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, *é a região hachurada na figura.*

Respostas: *a) demonstração*
b) gráfico

Comentário

Com questões bem enunciadas, de bom nível, criativas e bem diversificadas, além de pouco trabalhosa, a Banca Examinadora apresentou um ótima prova de Matemática.