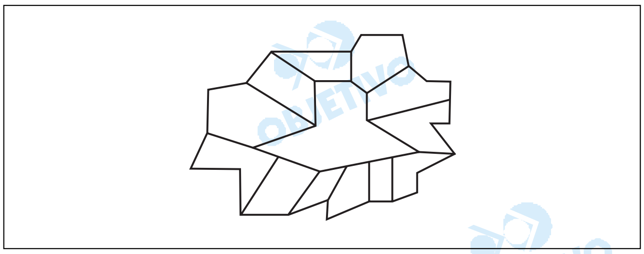
1 b

A figura exibe um mapa representando 13 países.
Considerando-se como países vizinhos aqueles cujas fronteiras têm um segmento em comum, o número mínimo de cores que se pode utilizar para colori-los, de forma que dois países vizinhos não tenham a mesma cor, é:



a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Resolução

Todos os países "laterais", em número de 12, são vizinhos do país central e deverão ter cores diferentes dele.
Os países "laterais" poderão ser pintados com apenas duas cores, alternando-as.
Assim, o número mínimo de cores necessárias é 3.

2 e

Um recipiente contém um litro de uma mistura de diesel e álcool, na proporção de 40% de diesel e 60% de álcool.
Deseja-se modificar esta proporção para 30% de diesel e 70% de álcool, sem retirar diesel. A quantidade mínima de álcool, em mililitros, que se deve adicionar à mistura original, considerando que as proporções mencionadas são sempre em volume, é de:

a) $\frac{200}{3}$ b) $\frac{400}{3}$ c) $\frac{700}{3}$ d) $\frac{800}{3}$ e) $\frac{1000}{3}$

Resolução

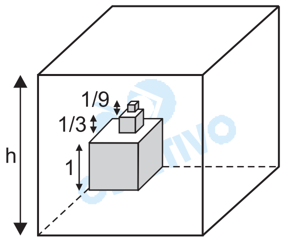
A mistura inicial contém 40% de 1ℓ = 400 mℓ de diesel e 60% de 1ℓ = 600 mℓ de álcool.
Admitindo-se que seja acrescido apenas álcool na quantidade de x mℓ, na mistura final teremos (600 mℓ + x mℓ) de álcool.
Desta forma

$600\,m\ell + x\,m\ell = 70\%\,(1000\,m\ell + x\,m\ell) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 600 + x = 700 + 0{,}7x \Leftrightarrow 0{,}3x = 100 \Leftrightarrow x = \frac{1000}{3}$

3 e

No interior de uma sala, na forma de um paralelepípedo com altura h, empilham-se cubos com arestas de medidas 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, e assim por diante, conforme mostra a figura.



O menor valor para a altura h, se o empilhamento pudesse ser feito indefinidamente, é:

a) 3 b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{7}{3}$ d) 2 e) $\frac{3}{2}$

Resolução

*Sendo **h** a soma das medidas das alturas dos infinitos cubos empilhados, temos:*

$$h = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

4 c

A seqüência de números naturais (a_1, 4, a_3, a_4, a_5, 3, a_7, a_8, ...), onde $a_2 = 4$ e $a_6 = 3$, tem a propriedade de que a soma de três termos consecutivos quaisquer é sempre igual a 13.

O mmc(a_{102}, a_{214}) é:

a) 3 b) 4 c) 6 d) 12 e) 36

Resolução

1) $a_4 + a_5 + 3 = a_5 + 3 + a_7 \Rightarrow a_4 = a_7$

2) $a_5 + 3 + a_7 = 3 + a_7 + a_8 \Rightarrow a_5 = a_8$

3) $a_3 + a_4 + a_5 = 13 \Leftrightarrow a_3 + a_7 + a_8 = 13 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_7 + a_8 = 13 - a_3$

4) $3 + a_7 + a_8 = 13 \Leftrightarrow 3 + 13 - a_3 = 13 \Leftrightarrow a_3 = 3$

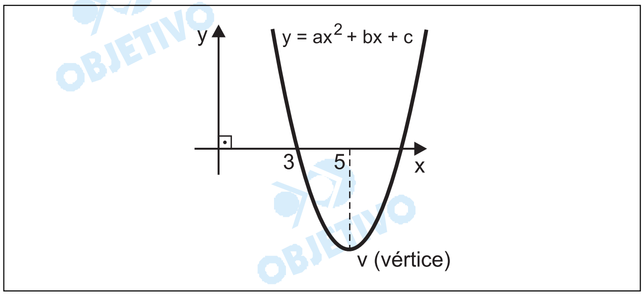
5) *Se a soma de 3 termos consecutivos é sempre 13 e* $a_3 = 3$ *e* $a_2 = 4$ *então a seqüência será:*
(6, 4, 3, 6, 4, 3, 6, 4, 3, …)

6) $a_{102} = 3$ e $a_{214} = 6$

7) mmc(3;6) = 6

5 e

Dividindo-se os polinômios $p_1(x)$ e $p_2(x)$ por $x - 2$ obtêm-se, respectivamente, r_1 e r_2 como restos. Sabendo-se que r_1 e r_2 são os zeros da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, conforme gráfico,



o resto da divisão do polinômio produto $p_1(x).p_2(x)$ por $x - 2$ é:

a) 3 b) 5 c) 8 d) 15 e) 21

Resolução

1) De acordo com o gráfico, os zeros da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ são 3 e 7 e, portanto, $r_1 = 3$ e $r_2 = 7$.

2) $\begin{array}{r|l} p_1(x) & x - 2 \\ \hline r_1 & q_1(x) \end{array} \Leftrightarrow p_1(2) = r_1 \Leftrightarrow p_1(2) = 3$

3) $\begin{array}{r|l} p_2(x) & x - 2 \\ \hline r_2 & q_2(x) \end{array} \Leftrightarrow p_2(2) = r_2 \Rightarrow p_2(2) = 7$

4) $\begin{array}{r|l} p_1(x) \,.\, p_2(x) & x - 2 \\ \hline r & q(x) \end{array} \Leftrightarrow p_1(2) \,.\, p_2(2) = r \Rightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \,.\, 7 = r \Leftrightarrow r = 21$

6 **a**

Certo dia um professor de matemática desafiou seus alunos a descobrirem as idades x, y, z, em anos, de seus três filhos, dizendo ser o produto delas igual a 40. De pronto, os alunos protestaram: a informação "x.y.z = 40" era insuficiente para uma resposta correta, em vista de terem encontrado 6 ternas de fatores do número 40 cujo produto é 40. O professor concordou e disse, apontando para um dos alunos, que a soma x+y+z das idades (em anos) era igual ao número que se podia ver estampado na camisa que ele estava usando. Minutos depois os alunos disseram continuar impossível responder com segurança, mesmo sabendo que a soma era um número conhecido, o que levou o professor a perceber que eles raciocinavam corretamente (chegando a um impasse, provocado por duas ternas). Satisfeito, o professor acrescentou então duas informações definitivas: seus três filhos haviam nascido no mesmo mês e, naquele exato dia, o caçula estava fazendo aniversário. Neste caso a resposta correta é:

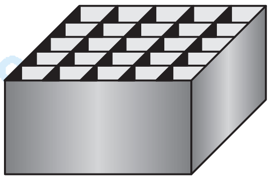
a) 1, 5, 8 b) 1, 2, 20 c) 1, 4, 10
d) 1, 1, 40 e) 2, 4, 5

Resolução

Os valores de x, y e z, tais que x . y . z = 40, podem ser dados pelas 6 ternas:
(1,1,40), (1,2,20), (1,4,10), (1,5,8), (2,2,10) e (2,4,5)
As somas dessas ternas são, respectivamente:
42, 23, 15, 14, 14 e 11.
Se os alunos não descobriram quais os valores de x, y e z, então as ternas possíveis são (1,5,8) e (2,2,10), de mesma soma 14.
Supondo que os três filhos tenham nascido no ***mesmo dia e mês*** *e naquele exato dia o caçula estava fazendo aniversário, a terna procurada é (1,5,8).*
O fato de nascerem no mesmo mês não é suficiente para excluir a terna (2,2,10), pois os filhos poderiam ter nascido nos dias 10 de dezembro de 1994, 20 de dezembro de 2001 e 15 de dezembro de 2002, por exemplo. Se a data for 15 de dezembro de 2004, o mais velho tem 10 anos, o do meio ainda tem 2 anos e o caçula faz 2 anos.

7 d

Um engradado, como o da figura, tem capacidade para 25 garrafas.



Se, de forma aleatória, forem colocadas 5 garrafas no engradado, a probabilidade de que quaisquer duas delas não recaiam numa mesma fila horizontal, nem numa mesma fila vertical, é:

a) $\dfrac{5!}{25!}$ b) $\dfrac{5!5!}{25!}$ c) $\dfrac{5!20!}{25!}$

d) $\dfrac{5!5!20!}{25!}$ e) $\dfrac{5!5!25!}{20!}$

Resolução

Existem $C_{25;5} = \dfrac{25!}{20!5!}$ *formas de se escolher 5 entre os 25 lugares disponíveis.*

Destas, existem 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5! formas de se escolher lugares para se colocar as cinco garrafas, sem que estejam duas na mesma horizontal, nem existam duas na mesma vertical.

Assim, a probabilidade pedida é

$$\dfrac{5!}{\dfrac{25!}{20!5!}} = \dfrac{5!.5!.20!}{25!}$$

8 **a**

Dada a matriz, 3 x 3, $A = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, a distância entre as retas r e s de equações, respectivamente, det(A) = 0 e det(A) = 1 vale:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 3. e) $3\sqrt{2}$.

Resolução

Sendo:

$$A = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se:

$det(A) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \ (r)$

$det(A) = 1 \Leftrightarrow 2x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x - y - \dfrac{1}{2} = 0 \ (s)$

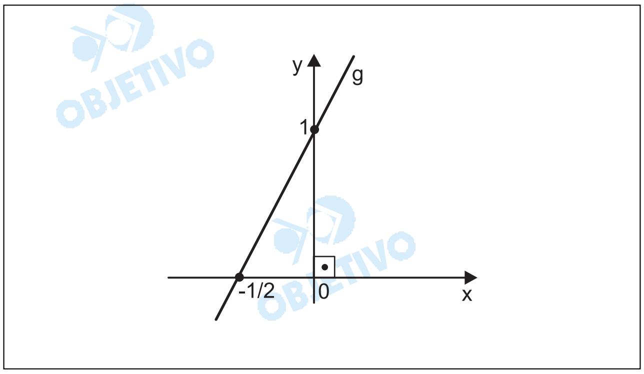
As retas r e s são paralelas e a distância entre elas é:

$$d = \frac{\left|0 + \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

9 c

Considere as funções dadas por $f(x) = \text{sen}\ \dfrac{\pi x}{2}$

$g(x) = ax + b$, sendo o gráfico de g fornecido na figura.

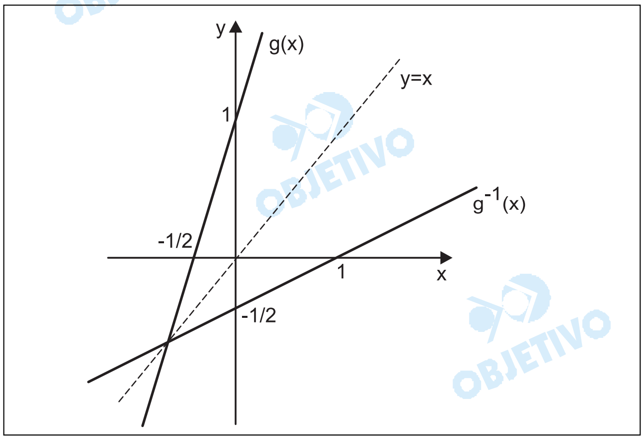


O valor de $f(g^{-1}(2))$ é:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) 1.

Resolução

Se g(x) é a função do gráfico dado, então sua função inversa $g^{-1}(x)$ terá como gráfico a reta indicada no gráfico, visto que seus gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.



A equação da reta da função $g^{-1}(x)$ é:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1 \Leftrightarrow x - 2y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{2}$$

ou $g^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

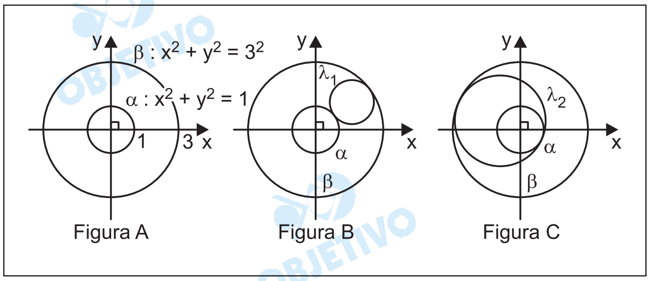
Portanto, com $f(x) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi \, . \, x}{2}\right)$ *e*

$$g^{-1}(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ resulta } f[g^{-1}(2)] = f\left[\frac{1}{2}\right] =$$

$$= \text{sen}\left(\frac{\pi \, . \, \frac{1}{2}}{2}\right) = \text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

10 c

Na Figura A aparecem as circunferências α, de equação $x^2 + y^2 = 1$, e β, de equação $x^2 + y^2 = 9$. Sabendo-se que as circunferências tangentes simultaneamente a α e a β são como λ_1 (na Figura B) ou λ_2 (na Figura C),



o lugar geométrico dos centros destas circunferências é dado:

a) pelas circunferências de equações $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ e $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

b) pela elipse de equação $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{3^2} = 2$

c) pelas circunferências de equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

d) pela circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.

e) pelas retas de equações $y = x$ e $y = -x$.

Resolução

1) O lugar geométrico dos centros das circunferências λ_1 é a circunferência de centro na origem e raio $\dfrac{3 + 1}{2} = 2$.

Portanto, tem equação $x^2 + y^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$

2) O lugar geométrico dos centros das circunferências λ_2 é a circunferência de centro na origem e raio $\dfrac{3 - 1}{2} = 1$.

Portanto, tem equação $x^2 + y^2 = 1^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

11 a

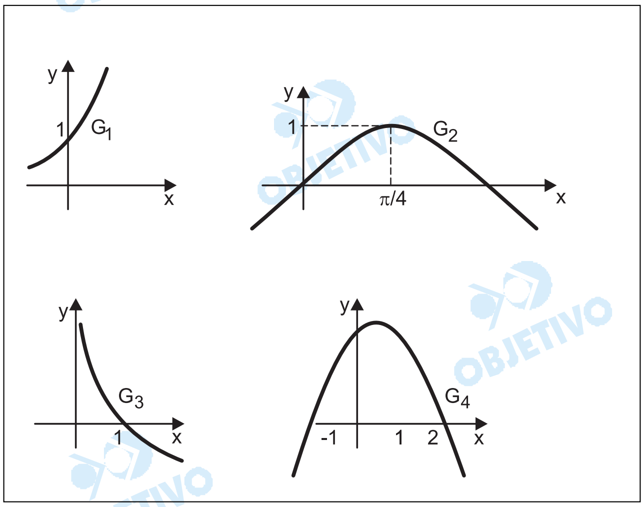
Considere as funções: $f_1(x) = 3^x$,

$f_2(x) = \log_{1/3}x$,

$f_3(x) = -(x + 1)(x - 2)$ e

$f_4(x) = \text{sen}(2x)$

e os gráficos G_1, G_2, G_3 e G_4 seguintes.



Das associações entre funções e gráficos, exibidas a seguir, a única inteiramente correta é:

a) $f_1 - G_1$; $f_3 - G_4$

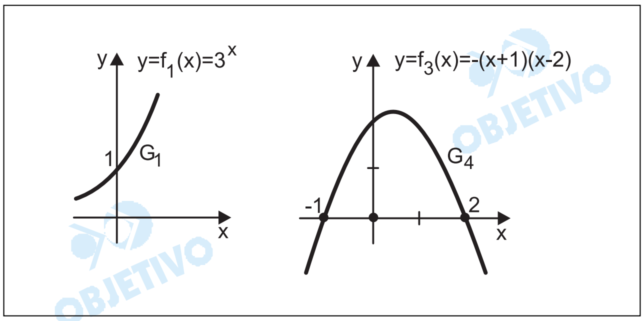
b) $f_4 - G_2$; $f_3 - G_3$

c) $f_3 - G_4$; $f_4 - G_3$

d) $f_2 - G_1$; $f_3 - G_2$.

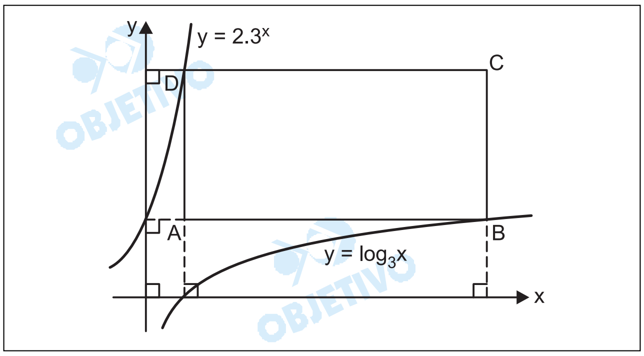
e) $f_2 - G_3$; $f_1 - G_4$.

Resolução



12 d

Com base na figura, o comprimento da diagonal AC do quadrilátero ABCD, de lados paralelos aos eixos coordenados, é:



a) $2\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{2}$ c) 8 d) $4\sqrt{5}$ e) $6\sqrt{3}$

Resolução

1º) $\left.\begin{array}{l} y = \log_3 x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

2º) $\left.\begin{array}{l} y = 2 \,.\, 3^x \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 \,.\, 3^0 = 2$

O ponto A tem coordenadas (1;2)

3º) $\left.\begin{array}{l} y = 2 \,.\, 3^x \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 \,.\, 3^1 = 6$

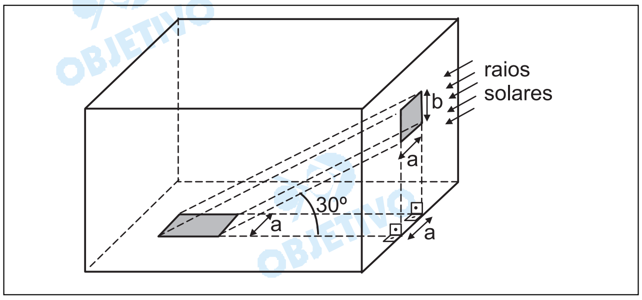
O ponto D tem coordenadas (1;6)

3º) $\left.\begin{array}{l} y = \log_3 x \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9$

O ponto B tem coordenadas (9;2)
Portanto, os lados AB e AD, do retângulo, medem respectivamente 8 e 4, e a diagonal AC é obtida por:
$AC^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow AC^2 = 80 \Rightarrow AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

13 d

Imagine uma parede vertical com uma janela retangular, de lados a e b, conforme a figura, onde a é paralelo ao piso plano e horizontal. Suponhamos que a luz solar incida perpendicularmente ao lado a, com inclinação de 60° em relação à parede.

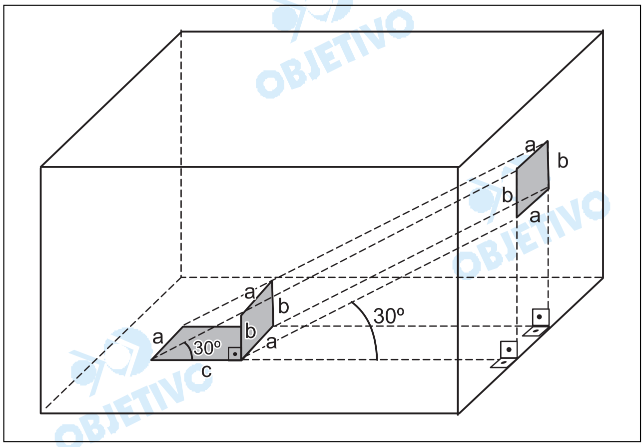


Se A_1 e A_2 representam, respectivamente, as áreas da janela e de sua imagem projetada no piso, a razão $\dfrac{A_1}{A_2}$ vale:

a) $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{1}{2}$

Resolução



*Sendo **c** a medida do outro lado do retângulo projetado, tem-se:*

1º) $tg\ 30° = \dfrac{b}{c} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{b}{c}$

2º) $A_1 = ab$

3º) $A_2 = ac$

4º) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{ab}{ac} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

14 b

A figura representa um retângulo subdividido em 4 outros retângulos com as respectivas áreas.

a	8
9	2a

O valor de a é:
a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

Resolução

	x	w	
y	a	8	y
z	9	2a	z
	x	w	

De acordo com a figura, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} xy = a \\ yw = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{w} = \frac{a}{8} \; (I)$$

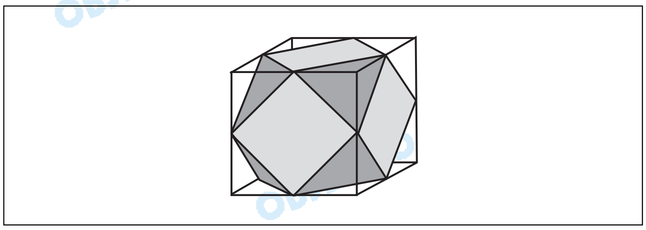
$$\left.\begin{array}{l} xz = 9 \\ zw = 2a \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{w} = \frac{9}{2a} \; (II)$$

De (I) e (II), tem-se:

$$\frac{a}{8} = \frac{9}{2a} \Leftrightarrow 2a^2 = 72 \Leftrightarrow a^2 = 36 \Leftrightarrow a = 6 \text{ (pois } a > 0)$$

15 b

Considere o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo.



O número de faces triangulares e o número de faces quadradas desse poliedro são, respectivamente:
a) 8 e 8 b) 8 e 6 c) 6 e 8
d) 8 e 4 e) 6 e 6

Resolução

O cubo possui exatamente 6 faces e 8 vértices.
Assim sendo, o novo poliedro possui exatamente 8 faces triangulares (uma para cada vértice do cubo) e 6 faces quadradas (uma para cada face do cubo).