Vestibular 2011 — 2ª fase
Gabarito — Matemática

Questão 01 (Valor: 15 pontos)

Sejam U o conjunto de todos os números de 5 algarismos distintos formados com os algarismos 1, 3, 5, 8 e 9 e M o conjunto de todos os números de 5 algarismos distintos formados com os algarismos 1, 3, 5, 8 e 9 que são menores que 58 931.

A probabilidade de, escolhendo-se ao acaso, um elemento de U pertencer a M é $\frac{n(M)}{n(U)}$, sendo n(M) e N(U) o número de elementos de M e de U, respectivamente.
Tem-se que n(U) = 5! = 5.4.3.2.1 = 120.

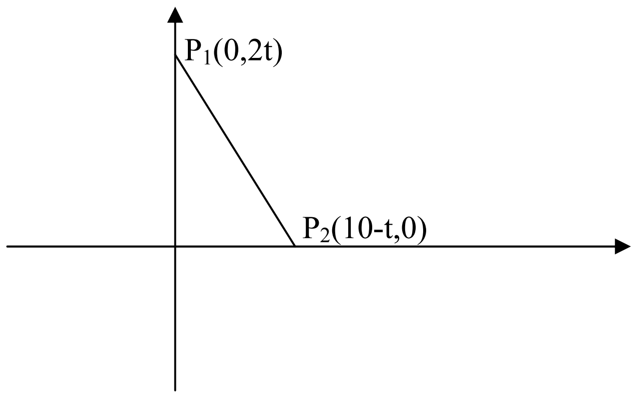
Cálculo do número de elementos de M:

- número de elementos de U que começam com 1: 1_ _ _ _: Fixado o algarismo 1 na 1ª posição temos 4 algarismos para permutar, logo corresponde a 4! = 4.3.2.1 = 24.
- número de elementos de U que começam com 3: 3 _ _ _ _: Fixado o algarismo 3 na 1ª posição temos 4 algarismos para permutar, logo corresponde a 4! = 4.3.2.1 = 24.
- número de elementos de U que começam com os algarismos 51_ _ _: Fixados os algarismos 5 e 1 temos 3 algarismos para permutar, logo corresponde a 3! = 3.2.1 = 6.
- número de elementos de U que começam com os algarismos 53_ _ _: Fixados os algarismos 5 e 3 temos 3 algarismos para permutar, logo corresponde a 3! = 3.2.1 = 6.
- número de elementos de U que começam com os algarismos 581_ _: Fixados os algarismos 5, 8 e 1 temos 2 algarismos para permutar, logo corresponde a 2! = 2.1 = 2.
- número de elementos de U que começam com os algarismos 583_ _: Fixados os algarismos 5, 8 e 1 temos 2 algarismos para permutar, logo corresponde a 2! = 2.1 = 2.
- por último o número 58913.

Assim, n(M) = 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 65, logo a probabilidade é igual a $\frac{65}{120} = \frac{13}{24}$.

Questão 02 (Valor: 15 pontos)

Em cada instante t a posição da partícula P_1 é dada por (0, 2t) e a posição da partícula P_2 dada por $(10-t, 0)$.



O quadrado da distância entre P_1 e P_2 é dado por $D^2 = (10-t)^2 + (2t)^2 = 100 - 20t + t^2 + 4t^2 = 5t^2 - 20t + 100$, função quadrática que assume valor mínimo para $t = \frac{-(-20)}{10} = 2$. Logo, quando o quadrado da distância é mínimo os pontos estarão nas posições $P_2(8, 0)$ e $P_1(0, 4)$. A reta que passa por esses pontos tem equação $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$, ou, $4x + 8y = 32$ ou $x + 2y = 8$.

Questão 03 (Valor: 20 pontos)

Como P(x) é divisível por $x^2 + 2$, duas de suas raízes são $-\sqrt{2}i$ e $\sqrt{2}i$ e as outras três estando em progressão geométrica, pode-se escrevê-las como $\frac{a}{q}$, a, aq, sendo q a razão da PG.
Usando as relações entre coeficientes e raízes para P(x), tem-se:

- a soma das raízes é $\frac{7}{3}$, logo $-\sqrt{2}i + \sqrt{2}i + \frac{a}{q} + a + aq = \frac{7}{3}$, o que equivale a $\frac{a + aq + aq^2}{q} = \frac{7}{3}$. (I)
- o produto das raízes é $-\frac{6}{3} = -2$, logo $-\sqrt{2}i \,.\, \sqrt{2}i \,.\, \frac{a}{q} \,.\, a \,.\, aq = -2$ o que resulta em $a^3 = -1$ e, portanto, $a = -1$.

Substituindo $a = -1$ em (I) obtém-se:
$$\frac{-1-q-q^2}{q} = \frac{7}{3} \Rightarrow -3 - 3q - 3q^2 = 7q \Rightarrow 3q^2 + 10q + 3 = 0 \Rightarrow q = -3 \text{ ou } q = -\frac{1}{3}.$$
Conclui-se, portanto, que as raízes são $\frac{1}{3}$, -1 e 3.
Sendo assim, $P(x) = 3(x^2+2)(x-\frac{1}{3})(x+1)(x-3)$ e o resto da divisão de P(x) por x+2 é igual a
$$P(-2) = 3((-2)^2 + 2)(-2 - \frac{1}{3})(-2+1)(-2-3) = 3.6.(-\frac{7}{3})(-1)(-5) = -210.$$

Questão 04 (Valor: 20 pontos)

A equação é equivalente a
$$4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x.\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(x + 7\pi) + \text{sen}\left(\frac{11\pi}{2}\right) = 0 \text{ ou}$$
$$4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cos x.\cos x + \cos x + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \text{ ou } \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$
Fazendo uma mudança de variável na última equação, substituindo y = cosx, obtém-se a equação do 2º grau $2y^2 + y + 1 = 0$, cujas soluções são $y = -1$ e $y = \frac{1}{2}$.

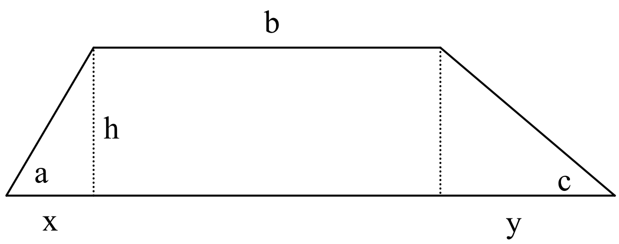
Para $y = -1$, tem-se $\cos x = -1$ e, portanto, $x = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$.
Para $y = \frac{1}{2}$, tem-se $\cos x = \frac{1}{2}$ e, portanto, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$.

Tem-se assim,

- Para k = 0: $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=-\frac{\pi}{3}$
- Para k = 1: $x=3\pi$, $x=\frac{7\pi}{3}$, $x=\frac{5\pi}{3}$
- Para k = –1: $x=-\pi$, $x=-\frac{5\pi}{3}$

As soluções no intervalo $[-6,\ 8]$ são $-\frac{5\pi}{3}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$ e $\frac{7\pi}{3}$.

Questão 05 (Valor: 10 pontos)



a = arctg2 $\Rightarrow$ tga = 2 = $\frac{h}{x} \Rightarrow$ x = $\frac{2}{2}$ $\Rightarrow$ x = 1 u.c.

tg c = tg45^o = $\frac{h}{y}$ $\Rightarrow$ 1 = $\frac{2}{y}$ $\Rightarrow$ y = 2u.c.

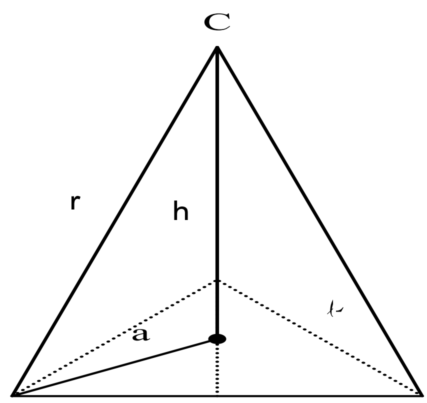
A_T = $\frac{(b+B).h}{2}$, sendo B = 1 + 4 + 2 = 7u.c.

A_T = $\frac{(4+7).2}{2}$ = 11 , A_T = 11 u.a.

Como T' é obtido de T por uma homotetia de razão $\frac{3}{2}$, segue que $A_{T'}$ = $\frac{9}{4}$**.**11 = $\frac{99}{4}$ u.a.

Questão 06 (Valor: 20 pontos)

Na figura tem-se a pirâmide em que r é a aresta, h a altura e **a** a distância do centro da base a um dos vértices.
Usando o teorema de Pitágoras obtém-se $a=\sqrt{r^2-h^2}$.



Sendo m a altura do triângulo equilátero, que é base da pirâmide, tem-se que $m=\frac{3}{2}a$

logo, $m=\frac{3}{2}\sqrt{r^2-h^2}$.

Sendo ℓ o lado do triângulo, $m=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e

$$\ell = \frac{2\sqrt{3}}{3} m = \sqrt{3}\sqrt{r^2 - h^2}$$

A área da base da pirâmide é igual a

$$S_b = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{r^2 - h^2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{r^2 - h^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(r^2 - h^2)$$

O volume da pirâmide é $V_p = \frac{S_b h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(r^2 - h^2)h$.

Obs.: Outras abordagens poderão ser aceitas, desde que sejam pertinentes.

Salvador, 12 de dezembro de 2010

Antonia Elisa Caló de Oliveira Lopes
Diretora do SSOA/UFBA