Vestibular 2ª Fase
Resolução das Questões Discursivas

São apresentadas abaixo possíveis soluções para as questões propostas. Nessas resoluções buscou-se justificar as passagens visando uma melhor compreensão do leitor.

Questão 1.

As três raízes reais do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ são termos de uma progressão aritmética. A fórmula do termo geral de uma PA com primeiro termo a_1 e razão igual a q é $a_n = a_1 + (n-1)q$ e a soma dos n primeiros termos é $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

As três raízes são: $r_1 = a_4 = a_1 + 3q$, $r_2 = a_7 = a_1 + 6q$, $r_3 = a_{16} = a_1 + 15q$. Para encontrá-las necessitamos dos valores de a_1 e q. Note que

$$S_{20} = \frac{20(a_1 + a_{20})}{2} = 10(a_1 + a_1 + 19q).$$

Usando as informações do problema montamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 10(2a_1 + 19q) = \dfrac{80}{3} \\ a_1 + 12q = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a_1 + 57q = 8 \\ a_1 + 12q = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a_1 + 57q = 8 \\ -6a_1 - 72q = -18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6a_1 + 57q = 8 \\ -15q = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{8 - 57q}{6} = -5 \\ q = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Substituindo estes valores nas fórmulas de r_1, r_2 e r_3 obtemos:

$$r_1 = -5 + 3 \cdot \frac{2}{3} = -3;$$

$$r_2 = -5 + 6 \cdot \frac{2}{3} = -1;$$

$$r_3 = -5 + 15 \cdot \frac{2}{3} = 5.$$

Como o coeficiente do termo de maior grau do polinômio $p(x)$ é igual a 1, este pode ser escrito como:

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3).$$

Logo

$$p(x) = (x+3)(x+1)(x-5) = (x+3)(x^2 + x - 5x - 5) = x^3 - x^2 - 17x - 15.$$

Resposta: $a = -1$, $b = -17$ e $c = -15$

Questão 2.

(a) A quantia inicial corresponde ao valor da função F no instante inicial $t=0$. Substituindo na expressão de F, temos

$$F(0)=100\cdot(1,2)^0=100\cdot 1=100.$$

Resposta: R$ 100,00.

(b) A quantia que a pessoa tem após 5 meses corresponde ao valor da função F no tempo $t=5$. Substituindo na expressão de F, temos

$$F(5)=100\cdot(1,2)^5.$$

Calculando $1,2^5=((1,2)^2)^2\cdot 1,2=1,44^2\cdot 1,2=2,0736\cdot 1,2=2,48832$. Logo

$$F(5)=100\cdot 2,48832=248,832.$$

Arredondando para centavos R$ $248,83$.

Resposta: R$ 248,83.

(c) Queremos encontrar o valor de t para o qual $F(t)=2700$, ou seja

$$100(1,2)^t=2700$$

$$(1,2)^t=27.$$

Chegamos a uma equação exponencial em T que resolvemos aplicando logaritmo dos dois lados:

$$\log_{10}(1,2)^t=\log_{10}27=\log_{10}3^3.$$

Usaremos as seguintes propriedades de logaritmo

$$\log_{10}a^p=p\cdot\log_{10}a;\quad \log_{10}ab=\log_{10}a+\log_{10}b;\quad \log_{10}\frac{a}{b}=\log_{10}a-\log_{10}b;\quad \log_{10}10=1.$$

Voltando à equação, temos

$$t\cdot\log_{10}(1,2)=3\cdot\log_{10}3.$$

A questão nos fornece valores para logaritmo de 2 e 3. Como $1,2=\frac{12}{10}=\frac{2^2\cdot 3}{10}$ podemos aplicar as propriedades de logaritmo novamente

$\log_{10}(1,2)=\log_{10}\frac{2^2\cdot 3}{10}=2\cdot\log_{10}2+\log_{10}3-\log_{10}10=2\cdot 0,3+0,48-1=0,08$. Logo

$$t\cdot 0,08=3\cdot 0,48=1,44$$

$$t=\frac{1,44}{0,08}=18.$$

Resposta: 18 meses.

Questão 3.

(a) Como o time A sempre ganha dos times B, C, D, E e sempre perde para os times F, G, H a probabilidade dele avançar para a próxima fase é:

$$\frac{\#\{\text{A enfrenta B, C, D ou E}\}}{\#\{\text{A enfrenta B, C, D, E, F, G ou H}\}}=\frac{4}{7}$$

Resposta: $\frac{4}{7}$.

(b) A probabilidade do time B avançar à próxima fase, tendo vencido um determinado time, é o produto da probabilidade dele enfrentar este time $\left(\frac{1}{7}\right)$ pela probabilidade dele vencer este time. Portanto, as probabilidades do time B

vencer o time A: $\frac{1}{7}\cdot 0 = 0$;

vencer o time C: $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{28}$;

vencer o time D: $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{28}$;

vencer o time E: $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{28}$;

vencer o time F: $\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{21}$;

vencer o time G: $\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{21}$;

vencer o time H: $\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{21}$.

A probabilidade do time B avançar para a próxima fase é a soma destas probabilidades

$$3\cdot\frac{2}{21} + 3\cdot\frac{1}{28} = \frac{2}{7} + \frac{3}{4\cdot 7} = \frac{8+3}{28} = \frac{11}{28}.$$

Resposta: $\frac{11}{28}$.

Questão 4

(a) O ponto $P = (x, y)$ pertence à reta r se, e somente se, satisfaz a equação $y = -x + 6$. Então, as coordenadas de P em função de x são $P = (x, -x + 6)$.

Agora, o ponto P está no interior da circunferência λ se, e somente se, a distância de P até o centro $C = (3,5)$ for menor que o raio de λ. Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos que o ponto $P = (x, -x + 6)$ está no interior da circunferência λ se, e somente se:

$$d(P, C) < 4$$

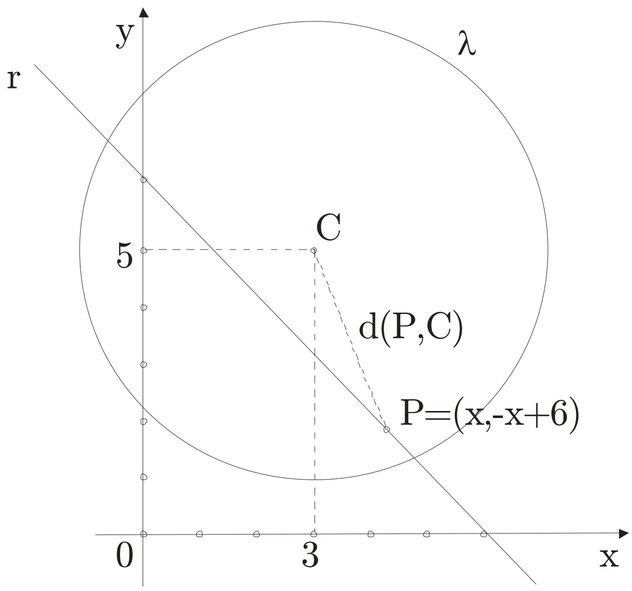
$$\sqrt{(x-3)^2 + (-x+6-5)^2} < 4$$

$$(x-3)^2 + (-x+1)^2 < 16$$

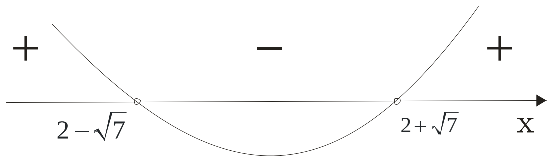
$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 < 16$$

$$2x^2 - 8x - 6 < 0$$

$$x^2 - 4x - 3 < 0.$$



Para determinar os valores de x para os quais esta função assume valores negativos fazemos o estudo do sinal da função quadrática $f(x) = x^2 - 4x - 3$. O discriminante desta função é $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 + 12 = 28 > 0$ e o coeficiente do termo quadrático é positivo. Logo, $f(x)$ possui duas raízes reais distintas e o seu gráfico é uma parábola com concavidade para cima.



As raízes da função $f(x)$ são:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}.$$

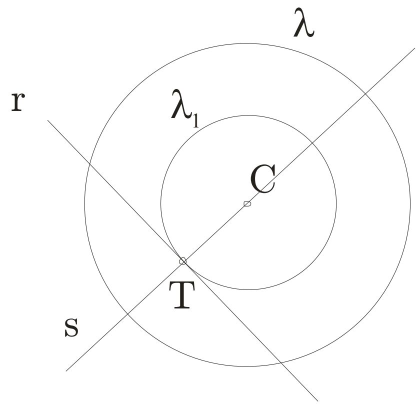
A função assume valores negativos, se e somente se, x está entre as raízes: $2 \pm \sqrt{7}$.

.

Resposta: O ponto $P = (x, y)$, pertencente à reta *r*, está no interior da circunferência λ para valores de x satisfazendo $2 - \sqrt{7} < x < 2 + \sqrt{7}$.

(b) Como a circunferência λ_1 possui o mesmo centro $C = (3,5)$ que a circunferência λ, basta determinar o raio de λ_1.

Sendo λ_1 tangente à reta *r*, o ponto de tangência T é o pé da perpendicular baixada do ponto C até *r*. Seja s a reta que passa por C e é perpendicular a *r*. O ponto T é o ponto de interseção da reta *r* com a reta *s*. O raio de λ_1 é a distância de C a T.



O coeficiente angular da reta *r* de equação $y = -x + 6$ é $m_r = -1$. O coeficiente angular da reta *s* deve ser $m_s = \frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{-1} = 1$.

Como *s* passa por $C = (3,5)$, sua equação é:

$$y - 5 = m_s(x - 3)$$
$$y - 5 = 1 \cdot (x - 3)$$
$$y = x + 2.$$

Para encontrar o ponto de interseção T basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 6 = x + 2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Então, o ponto de tangência é $T = (2,4)$ e o raio de λ_1 é igual a:

$$d(C,T) = \sqrt{(3-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Portanto, λ_1 é a circunferência de centro $C = (3,5)$ e raio $\sqrt{2}$.

Resposta: A equação de λ_1 é: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 2$.

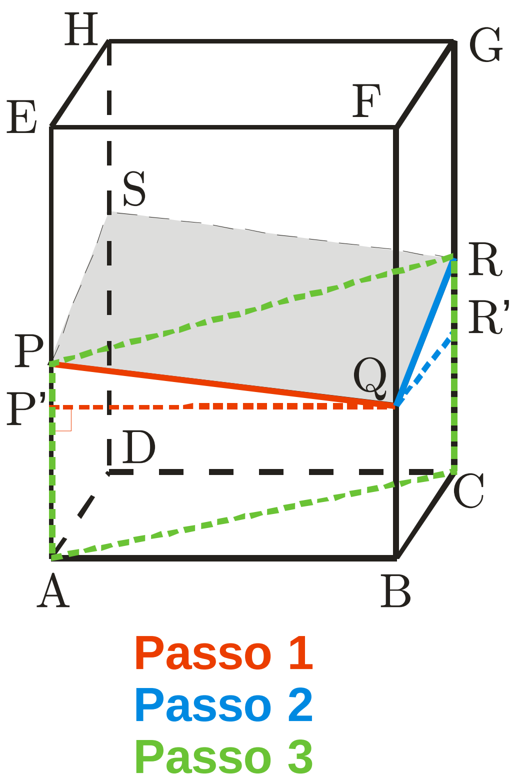
Questão 5

A lei dos cossenos, aplicada ao triângulo PRS, estabelece que:

$$PR^2 = PS^2 + RS^2 - 2 \cdot PS \cdot RS \cdot \cos \widehat{PSR}.$$

Logo:

$$\cos \widehat{PSR} = \frac{PS^2 + RS^2 - PR^2}{2 \cdot PS \cdot RS}.$$



Passo 1: Seja P' o pé da perpendicular baixada do ponto Q até a reta $\overleftrightarrow{AE}$. Então, $ABQP'$ é um retângulo e daí:

$$QP' = AB = 10 \text{ e}$$

$$P'P = AP - AP' = AP - BQ = 30 - 20 = 10.$$

Logo, no triângulo $PP'Q$, retângulo em P', temos que:

$$PQ^2 = P'P^2 + P'Q^2 = 10^2 + 10^2 = 200$$

$$PQ = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

Passo 2: Seja R' o pé da perpendicular baixada do ponto Q até a reta $\overleftrightarrow{CG}$. Então $BCR'Q$ é um retângulo e daí:

$$QR' = BC = 10 \text{ e}$$

$$R'R = CR - CR' = CR - BQ = 30 - 20 = 10.$$

Logo, no triângulo $RR'Q$, retângulo em R', temos que:

$$RQ^2 = R'R^2 + R'Q^2 = 10^2 + 10^2 = 200$$

$$RQ = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

Passo 3: Como $\overline{AP}$ é paralelo a $\overline{CR}$ e $AP = CR = 30$, então $ACRP$ é um paralelogramo e $PR = AC$. Mas:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow PR = AC = 10\sqrt{2}.$$

Passo 4: Como $\overline{PS}$ e $\overline{QR}$ são coplanares e estão em faces opostas do prisma, temos que $\overline{PS}$ e $\overline{QR}$ são paralelos. Analogamente, $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$ são paralelos. Logo, $PQRS$ é um paralelogramo e então $PS = QR = 10\sqrt{2}$ e $RS = PQ = 10\sqrt{2}$.

Finalmente, substituindo as medidas encontradas na expressão obtida acima para o cosseno, obtemos:

$$\cos \widehat{PSR} = \frac{200 + 200 - 200}{2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Resposta: $\frac{1}{2}$.