**Questão 1 –** Seja $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3dx + e$ um polinômio com coeficientes reais em que $b = -1$ e uma das raízes é $x = -1$. Sabe-se que $a < b < c < d < e$ formam uma progressão aritmética crescente.

**a)** Determine a razão dessa progressão aritmética e os coeficientes do polinômio $P(x)$.

Sabe-se que $a < b < c < d < e$ formam uma progressão aritmética crescente (PA crescente). Seja $r$ a razão dessa PA. Escrevendo essa PA em função de $b$ e $r$, temos

$$a = b - r < b < c = b + r < d = b + 2r < e = b + 3r.$$

Usando o fato que $x = -1$ é raiz do polinômio $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3dx + e$, obtemos:

$$0 = P(-1) = a(-1)^4 + b(-1)^3 + c(-1)^2 + 3d(-1) + e \quad \Rightarrow \quad a - b + c - 3d + e = 0.$$

Segue que

$$(b - r) - b + (b + r) - 3(b + 2r) + (b + 3r) = 0 \quad \Rightarrow \quad -b - 3r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{b}{3}.$$

Como $b = -1$, temos $r = \frac{1}{3}$.

Determinemos agora os coeficientes $a, b, c, 3d, e,$ do polinômio $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3dx + e$:

$$a = b - r = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3},\ b = -1,\ c = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3},\ 3d = 3(-1 + \frac{2}{3}) = -1,\ e = -1 + \frac{3}{3} = 0.$$

Portanto, $P(x) = -\frac{4}{3}x^4 - 1x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 1x$.

**b)** Encontre as demais raízes do polinômio $P(x)$.

Note que o polinômio $P(x)$ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$P(x) = -\frac{1}{3}x(4x^3 + 3x^2 + 2x + 3).$$

Note que $x = 0$ é raiz de $P(x)$. Como $x = -1$ é raiz do polinômio $P(x)$, temos que também é raiz do polinômio $Q(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 3$. Assim dividindo o polinômio $Q(x)$ por $x + 1$ obtemos:

Divisão de polinômio ou Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

$$\begin{array}{l|l}
4x^3 + 3x^2 + 2x + 3 & x + 1 \\ \hline
-4x^3 - 4x^2 & 4x^2 - x + 3 \\
\quad - x^2 + 2x + 3 & \\
\quad + x^2 + x & \\
\qquad 3x + 3 & \\
\qquad -3x - 3 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc:c}
-1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ \hline
 & \underbrace{4 \quad -1 \quad 3}_{4x^2 - x + 3} & & & 0
\end{array}$$

0 → Resto da divisão

Logo, $P(x) = -\frac{1}{3}x \cdot Q(x) = -\frac{1}{3}x(4x^2 - x + 3)(x + 1)$. As raízes de $4x^2 - x + 3$ são:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 48}}{8} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{47}}{8}i.$$

Portanto, as raízes do polinômio $P(x)$ são: -1, 0, $\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{47}}{8}i$ e $\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{47}}{8}i$.

**Questão 2 –** No plano cartesiano, considere os pontos $A(-1,2)$ e $B(3,4)$.

**a)** Encontre a equação da reta $r$ que passa por $A$ e forma com o eixo das abscissas um ângulo de $135^\circ$, medido do eixo para a reta no sentido anti-horário.

A equação da reta $r$ que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$ e tem inclinação de $\theta$ é dada por, $y - y_A = m_r(x - x_A)$, onde $m_r = tg(\theta)$ é o coeficiente angular da reta $r$.

Como $A(-1,2)$ e $\theta = 135^\circ$, temos $m_r = tg(135^\circ) = -1$ e

$$y-(2) = -1(x-(-1)) \quad \Rightarrow \quad y-2 = -1(x+1)) \quad \Rightarrow \quad y = -x+1.$$

Equação da reta $r$: $y_r = -x+1$.

**b)** Seja $s$ a reta que passa por $B$ e é perpendicular à reta $r$. Encontre as coordenadas do ponto $P$, determinado pela intersecção das retas $r$ e $s$.

Sejam $m_r$ e $m_s$ os coeficientes angulares das retas $r$ e $s$, respectivamente. Como as retas $r$ e $s$ são perpendiculares, temos $m_r . m_s = -1$. Pelo item **a**, sabemos que $m_r = -1$, logo

$$m_s = \frac{-1}{m_r} \quad \Rightarrow \quad m_s = \frac{-1}{-1} \quad \Rightarrow \quad m_s = 1.$$

Como a reta $s$ passa pelo ponto $B(3,4)$, sua equação é dada por

$$y-(4) = 1(x-(3)) \quad \Rightarrow \quad y-4 = x-3 \quad \Rightarrow \quad y = x+1.$$

Então, a equação da reta $s$ é dada por: $y_s = x+1$.

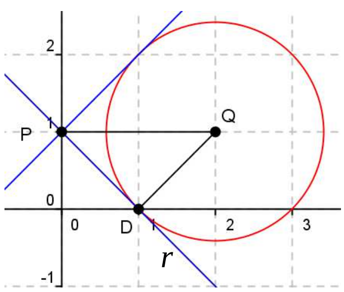
Determinemos agora o ponto $P$ dado pela intersecção das retas $r$ e $s$ $\begin{cases} y_r = -x+1 \\ y_s = x+1 \end{cases}$.

Resolvendo o sistema, obtemos $x+1 = -x+1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$. Logo $P(0,1)$.

**c)** Determine a equação da circunferência que possui centro no ponto $Q(2,1)$ e tangencia as retas $r$ e $s$.

Seja $D$ o ponto de tangência da circunferência com a reta $r$. Logo o comprimento do segmento $\overline{QD}$ é o raio $R$ da circunferência, isto é, $R = QD$. Como $D$ é o ponto de tangência da circunferência com a reta $r$, temos que o ângulo $P\widehat{D}Q$ é retângulo em $D$, ou seja, $P\widehat{D}Q = 90^\circ$. A reta que passa por $P$ e $Q$ é paralela ao eixo dos $x$, logo $D\widehat{P}Q = P\widehat{Q}D = 45^\circ$ e o triângulo retângulo $DPQ$ é isósceles de lado $QD$ e hipotenusa $PQ = 2$. Assim,

$$R^2 + R^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad 2R^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{2}.$$




A equação de uma circunferência que possui centro no ponto $(x_o, y_o)$ e raio $R$ é dada por

$$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 = R^2.$$

Portanto, a equação da circunferência que possui centro no ponto $Q(2,1)$ é:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$$

**Outra resolução possível:**
Como a circunferência tangencia a reta $r$, temos que o raio, $R$, da circunferência é dado pela distância do centro $Q(2,1)$ à reta $r: y+x-1=0$ (mesmos argumentos podem ser usados com a reta $s$). Assim,

$$R = d_{Q,r} = \frac{|1(2)+1(1)-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{|2|}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{2}\ .$$

Logo, a equação da circunferência que possui centro no ponto $Q(2,1)$ e tangencia as retas $r$ e $s$ é:

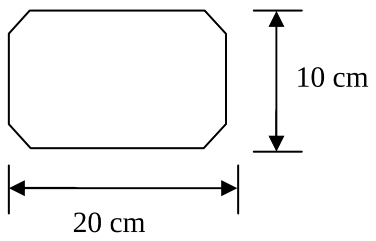
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2\ ,$$

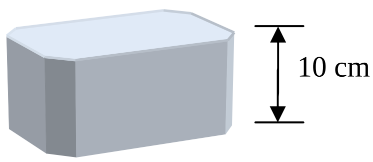
ou seja,

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$$

Observação: distância do ponto $Q(x_Q, y_Q)$ a reta $r: ax+by+c=0$: $d_{Q,r} = \dfrac{|a\,x_Q + b\,y_Q - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

**Questão 3 –** Uma empresa de sorvete utiliza como embalagem um prisma reto, cuja altura mede $10$ cm e cuja base é dada conforme descrição a seguir: de um retângulo de dimensões $20$ cm por $10$ cm, extrai-se em cada um dos quatro vértices um triângulo retângulo isósceles de catetos de medida 1cm.




**a)** Calcule o volume da embalagem.

Seja $V$ o volume da embalagem, isto é, $V = A \times h$, onde :

$h$ = altura da embalagem,
$A$ = área da base desta embalagem.

Temos que, cada um dos quatro triângulos extraídos tem área igual a $\dfrac{1}{2}$ cm$^2$. Logo

$$A = (20 \times 10 - 4\frac{1}{2}) = 198 \text{ cm}^2\ .$$

Assim, o volume desta embalagem é dado por

$$V = 198 \times 10 = 1980 \text{ cm}^3\ .$$

**b)** Sabendo que o volume ocupado por esse sorvete aumenta em $\frac{1}{5}$ (um quinto) quando passa do estado líquido para o estado sólido, qual deve ser o volume máximo ocupado por esse sorvete no estado líquido, nessa embalagem, para que, ao congelar, o sorvete não transborde?

Sejam

$V$ = volume da embalagem, isto é $V = A \times h$.
$V_0$ = o volume que deve ser colocado na embalagem, para que, ao congelar, o sorvete não transborde.

Então

$$V_0 + \frac{1}{5}V_0 = V \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{5}V_0 = V \Rightarrow \quad V_0 = \frac{5}{6}V .$$

Portanto,

$$V_0 = \frac{5}{6} \times 1980 = 1650 \text{ cm}^3 .$$

**Questão 4 –** Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas por $f(x) = x - 14$ e $g(x) = -x^2 + 6x - 8$, respectivamente.

**a)** Determine o conjunto dos valores de $x$ tais que $f(x) > g(x)$.

Defina

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 5x - 6 .$$

Neste caso, $f(x) > g(x) \Leftrightarrow h(x) > 0$.

Note que a representação gráfica da função $h$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, cujas raízes são dadas por:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 6 .$$

Logo $h(x) > 0$ para todos os valores de $x$ fora do intervalo compreendido entre as raízes $x_1$ e $x_2$. Assim o conjunto procurado é,

$$X = \{x \in \mathbb{R}; h(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}; f(x) > g(x)\} = \mathbb{R} - [-1, 6] = ]-\infty, -1[ \cup ]6, +\infty[ .$$

**b)** Determine o menor número real $\kappa$ tal que $f(x) + \kappa \geq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Defina

$$h_k(x) = f(x) + k - g(x) = x^2 - 5x - 6 + k .$$

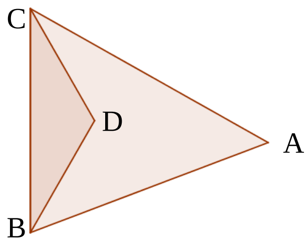
Neste caso, $f(x) + k \geq g(x) \Leftrightarrow h_k(x) \geq 0$.

Note que a representação gráfica da função $h_k$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, logo $h_k(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, quando $\Delta \leq 0$, ou seja, quando

$$\Delta = 25 + 24 - 4k \leq 0 \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{49}{4} .$$

Como queremos o menor $k$, seu valor é $k = \frac{49}{4}$.

**Questão 5 –** Considere dois triângulos $ABC$ e $DBC$, de mesma base $\overline{BC}$, tais que $D$ é um ponto interno ao triângulo $ABC$. A medida de $\overline{BC}$ é igual a $10$ cm. Com relação aos ângulos internos desses triângulos, sabe-se que: $D\hat{B}C = B\hat{C}D$, $D\hat{C}A = 30^\circ$, $D\hat{B}A = 40^\circ$, $B\hat{A}C = 50^\circ$.

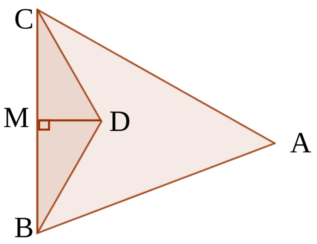



**a)** Encontre a medida do ângulo $B\hat{D}C$.

Seja $\alpha = D\hat{B}C = B\hat{C}D$. Logo $C\hat{B}A = \alpha + 40^\circ$ e $B\hat{C}A = \alpha + 30^\circ$. Como a soma dos ângulos internos do triângulo $ABC$ é $180^\circ$, temos $C\hat{B}A + B\hat{C}A + B\hat{A}C = 180^\circ$, ou seja, $(\alpha + 40^\circ) + (\alpha + 30^\circ) + 50^\circ = 180^\circ$.
Logo, $2\alpha = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ - 50^\circ = 60^\circ$ e assim, $\alpha = 30^\circ$.

Do triângulo $DBC$, obtemos a seguinte relação entre seus ângulos internos: $B\hat{D}C + D\hat{C}B + C\hat{B}D = 180^\circ$.
Logo, $B\hat{D}C + 2\alpha = 180^\circ$, e assim $B\hat{D}C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

**b)** Calcule a medida do segmento $\overline{BD}$.




Seja $M$ um ponto no segmento $\overline{BC}$ tal que $\overline{DM}$ é a altura do triângulo $DBC$ de base $\overline{BC}$. Como $D\hat{B}C = B\hat{C}D$, segue que o triângulo $DBC$ é isósceles de base $\overline{BC}$, e assim $M$ é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e

$$BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5.$$

Do triângulo $BMD$, retângulo em $M$, temos

$$\cos(\alpha) = \frac{BM}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{BD} \Rightarrow BD\cdot\sqrt{3} = 10 \Rightarrow BD = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

**Outra resolução possível:**

Usando a lei dos Cossenos para o ângulo $B\hat{D}C$ no triângulo $DBC$ temos

$$(BC)^2 = (CD)^2 + (BD)^2 - 2\cdot CD\cdot BD\cdot\cos(120^\circ).$$

Como o triângulo $DBC$ é isósceles de base $\overline{BC}$, segue que $BD = CD$. Assim,

$$(10)^2 = (BD)^2 + (BD)^2 - 2\cdot BD\cdot BD\cdot(-\frac{1}{2}) \Rightarrow 100 = 2(BD)^2 + (BD)^2,$$

ou seja,

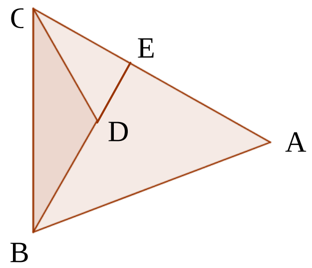
$$3(BD)^2 = 100 \Rightarrow (BD)^2 = \frac{100}{3} \Rightarrow BD = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow BD = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

**Outra resolução possível:**

Usando a Lei dos Senos nos lados $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$ do triângulo $DBC$ temos:

$$\frac{BC}{sen(120^\circ)} = \frac{BD}{sen(30^\circ)} \Rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{BD}{\frac{1}{2}} \Rightarrow BD = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow BD = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

**c)** Admitindo-se tg $(50°) = \frac{6}{5}$, determine a medida do segmento $\overline{AC}$.




Seja $E$ o ponto de interseção do segmento $\overline{AC}$ com o prolongamento do segmento $\overline{BD}$. Do triângulo $ABE$, obtemos a seguinte relação: $B\hat{E}A + E\hat{A}B + A\hat{B}E = 180°$. Logo $B\hat{E}A = 180° - 40° - 50° = 90°$. Da mesma forma, temos que $B\hat{E}C = 90°$. Como $CD = BD = \frac{10\sqrt{3}}{3}$, do triângulo $CED$, retângulo em $E$, obtemos:

$$DE = DC \cdot sen(30°) \Rightarrow DE = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow DE = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

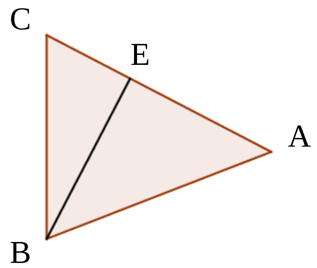
$$CE = DC \cdot \cos(30°) \Rightarrow CE = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CE = 5.$$

Logo $BE = BD + DE = \frac{10\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3}$, ou seja, $BE = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$.

Usando que $tg(50°) = \frac{6}{5}$, obtemos:

$\frac{6}{5} = tg(50°) = \frac{BE}{AE} \Rightarrow AE = \frac{5}{6} BE \Rightarrow AE = \frac{5}{6} \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow AE = \frac{25\sqrt{3}}{6}$. Assim, $AC = AE + EC = 5 + \frac{25\sqrt{3}}{6}$.

**Outra resolução possível:**




Seja o ponto $E$ no segmento $\overline{AC}$ de tal forma que $\overline{BE}$ seja a altura do triângulo $ABC$ de base $\overline{AC}$. Logo os triângulos $BCE$ e $ABE$ são retângulos em $E$. Assim,

$$sen(60°) = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5\sqrt{3}.$$

$$tg(60°) = \frac{BE}{CE} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{CE} \Rightarrow CE = 5.$$

$$tg(50°) = \frac{BE}{AE} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{5\sqrt{3}}{AE} \Rightarrow AE = \frac{25\sqrt{3}}{6}.$$

Logo $AC = AE + CE = 5 + \frac{25\sqrt{3}}{6}$.