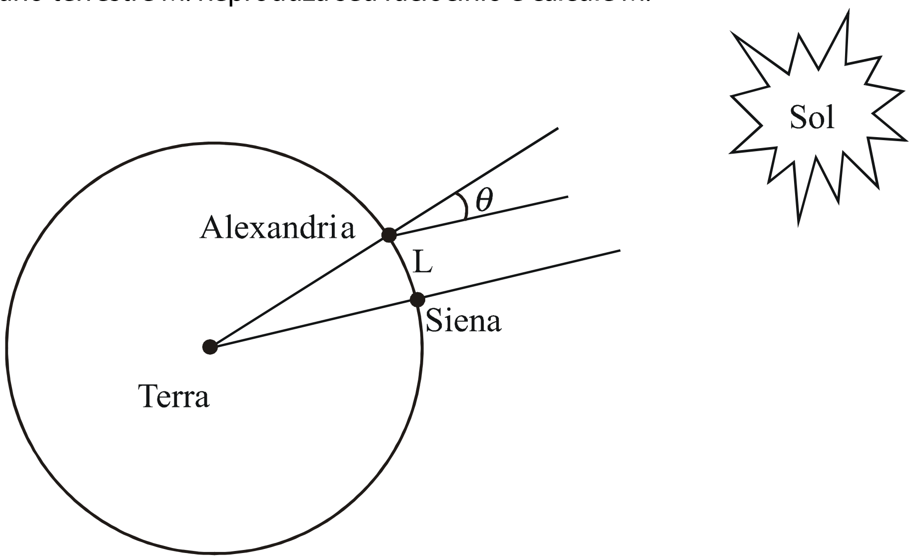
Resolução

1 No 3º século a.C., o diretor da Biblioteca de Alexandria, Eratóstenes de Cirene, calculou da seguinte forma o meridiano terrestre: conhecia-se a distância L entre Alexandria e Siena, igual aos atuais 787,5 km; sabia-se que, ao meio-dia do solstício de verão, o sol estava a pino em Siena e projetava sombra em Alexandria, em edificações verticais. As duas cidades estavam localizadas aproximadamente sobre o mesmo meridiano. Eratóstenes mediu a inclinação θ dos raios do sol em relação à perpendicular em Alexandria e obteve aproximadamente $\theta = 7^o$. Conseguiu, então, calcular com boa precisão a medida do meridiano terrestre M. Reproduza seu raciocínio e calcule M.



$$L = 787{,}5km$$

$$\frac{L}{\theta} = \frac{M}{360^o}$$

$$\frac{L}{7^o} = \frac{M}{360^0}$$

$$M = 787{,}5.\frac{360^o}{7^o} = 40500km$$

Na correção da prova, aceitamos por igual a alternativa que considera o meridiano como sendo o semi-círculo da terra, conforme definem alguns dicionários.

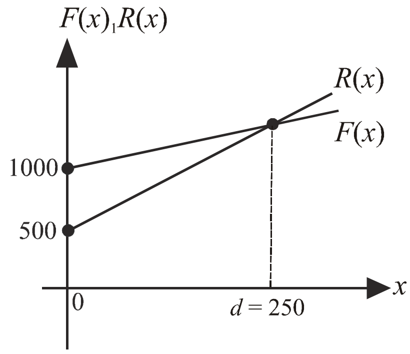
Neste segundo caso, a resolução se torna: $M = 787{,}5.\frac{180^o}{7^o} = 20250km$, solução também aceita pelos examinadores.

2 Para transportar certa carga, uma empresa tem as seguintes opções:
Por ferrovia – Custo fixo de R$ 1.000,00 mais R$ 5,00 para cada quilômetro rodado.
Por rodovia – Custo fixo de R$ 500,00 mais R$ 7,00 para cada quilômetro rodado.

A Calcule, em quilômetros, a distância **d** a ser percorrida para que os custos totais sejam iguais e calcule o valor desse custo.
B Para uma distância percorrida maior que **d**, qual a opção mais barata? Justifique.

$x = \textit{distância percorrida em km}$

$$F(x) = 1000 + 5x$$
$$R(x) = 500 + 7x$$
$$a) F(x) = R(x) \Leftrightarrow 1000 + 5x = 500 + 7x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 500 = 2x \Leftrightarrow x = 250km$$



$$F(250) = R(250) = R\$\ 2250$$

$$b)\ para\ x > 250\ \ temos\quad F(x) < R(x)$$

3 Considere o polinômio dado por $P(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ x & -1 & x \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix}-20$. Sabendo que uma das raízes de *P(x)* é -2, obtenha as outras raízes .

$$P(x)=(-x+2x^2+2-x^3)-20$$
$$P(x)=-x^3+2x^2-x-18 \textit{ é divisível por } (x+2)$$

	-1	2	-1	-18
-2	-1	4	-9	0

$\Rightarrow$ $\textit{quociente}:(-x^2+4x-9)$

$$\textit{Logo } P(x)=(x+2)(-x^2+4x-9)$$
$$\textit{As outras raízes se obtém fazendo } -x^2+4x-9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x+9=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-36}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{5}i}{2}=2\pm\sqrt{5}i$$

$\textit{Outras raízes: } 2\pm\sqrt{5}i \text{ e } 2-\sqrt{5}i$

4 Resolver a equação $3^{(x+1)} - 3^{(3-x)} = 80$.

$$3.3^x - 3^3.3^{-x} - 80 = 0$$

$$3.3^x - \frac{3^3}{3^x} - 80 = 0$$

$$\frac{3.3^{2x} - 27 - 80.3^x}{3^x} = 0 \quad 3^x \neq 0 \quad \forall x \in \Re$$

$$\therefore 3.3^{2x} - 80.3^x - 27 = 0$$

$$chamando \quad y = 3^{2x}$$

$$3.y^2 - 80y - 27 = 0$$

$$\Delta = 6400 + 4.3.27$$

$$\Delta = 6724$$

$$y = \frac{+80 \pm \sqrt{6724}}{2.3}$$

$$y = \frac{80 \pm 82}{6} \begin{cases} \nearrow \dfrac{162}{6} = 27 \\ \searrow \dfrac{-2}{6} = \cancel{\dfrac{-1}{3}} \end{cases}$$

$$\therefore \quad y = 27$$

$$3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3$$

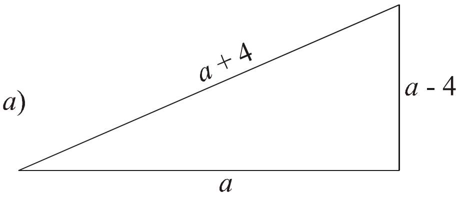
$$\Rightarrow x = 3$$

5 As medidas dos lados de um triângulo retângulo formam uma progressão aritmética de razão igual a 4.

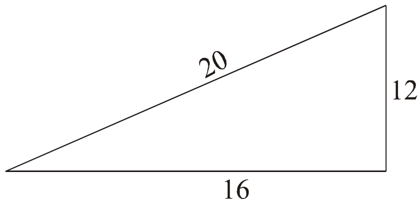
A Calcule a medida de cada um dos lados desse triângulo.

B Calcule a área do círculo inscrito nesse triângulo.

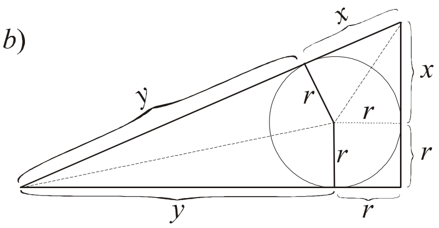
a)



$$(a+4)^2 = a^2 + (a-4)^2$$
$$\cancel{a^2} + 8a + \cancel{16} = \cancel{a^2} + a^2 - 8a + \cancel{16}$$
$$a^2 - 16a = 0$$
$$a.(a-16) = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = 16 \end{cases} \therefore \textit{Lados } 16,\ 12,\ 20$$



b)



$$\left.\begin{matrix} x + y = 20 \\ y + r = 16 \\ x + r = 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} y - 16 = x - 12 \\ x - y = -4 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = -4 \end{cases}$$
$$\begin{matrix} 2x = 16 & \Rightarrow & x = 8 \\ 2y = 24 & \Rightarrow & y = 12 \end{matrix} \quad \therefore \quad r = 12 - 8 \Rightarrow r = 4$$

$$A_{círculo} = \pi\, r^2 = \pi . 16$$

6 Seja o sistema linear $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x+y-z=4 \\ 4x-y+kz=5 \end{cases}$

de incógnitas x, y e z, onde k é um parâmetro real.
Determine o valor de k para que o sistema seja possível e indeterminado.

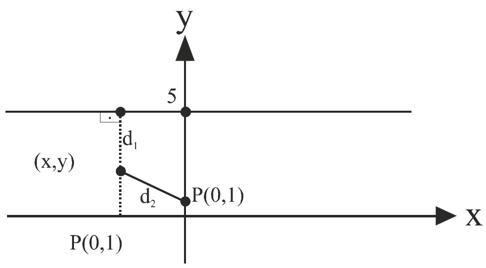
$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x+y-z=4 \\ 4x-y+kz=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=1 \\ 7y-4z=1 \\ 7y+(k-4).z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 7y-4z=1 \\ k.z=0 \end{cases}$$

Para o sistema ser possível e indeterminado $k=0$

7 No plano cartesiano, são dados o ponto P(0,1) e a reta r de equação y=5.

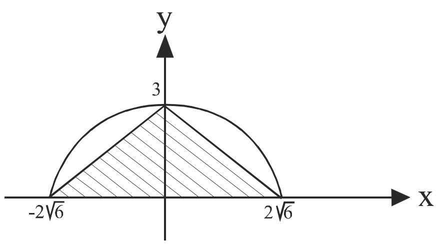
A Obtenha a equação do conjunto dos pontos (x,y) eqüidistantes do ponto P e da reta r.
B Calcule a área do triângulo cujos vértices são os pontos de intersecção desse conjunto com os eixos coordenados.



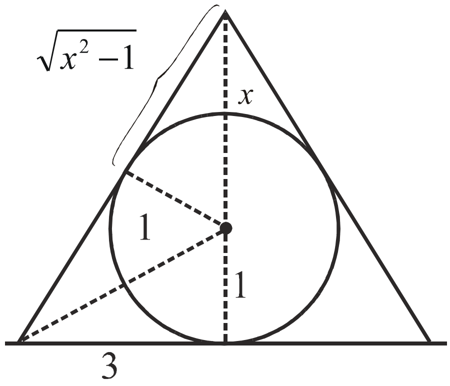
$$d_1 = d_2$$
$$5 - y = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$
$$(5-y)^2 = x^2 + (y-1)^2$$
$$25 - 10y + \cancel{y}^2 = x^2 + \cancel{y}^2 - 2y + 1$$
$$-8y = x^2 - 24$$
$$y = \frac{-1}{8}.x^2 + 3$$

$$\text{Área do triângulo} = \frac{base.altura}{2}$$

$$\text{Área do triângulo} = \frac{4\sqrt{6}.3}{2} = 6.\sqrt{6}$$



8 Uma esfera de raio 1 está inscrita em um cone circular reto cuja base tem raio 3. Determine a altura desse cone.



$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow (x^2-1).9 = x^2+2x+1$$

$$8x^2-2x-10=0$$

$$4x^2-x-5=0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.4.-5$$

$$\Delta = 81$$

$$x = \frac{1 \pm 9}{8} \begin{cases} \nearrow \text{-1 } \textit{não convém} \\ \searrow \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$\therefore \textit{altura} = x+1 = \frac{5}{4}+1 = \frac{9}{4}$$

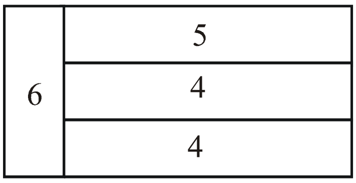
9 Um fumante define a seguinte estratégia para deixar de fumar: do total que atualmente fuma diariamente, reduzir 3 cigarros no primeiro dia, aumentar um cigarro no segundo dia, diminuir 3 no terceiro dia, aumentar 1 no quarto dia , repetindo essa rotina até que a quantidade de cigarros fumados diariamente seja reduzida a zero. Considerando que hoje ele fume 41 cigarros:

A contando com o dia de hoje, por quantos dias ele ainda fumará até o primeiro dia em que zere seu consumo?
B quantos cigarros, incluindo os consumidos no dia de hoje, ele ainda irá fumar até o primeiro dia em que zere o seu consumo?

a)
$$
\begin{array}{lll}
3 = 41 - 2.(n-1) & 2n = 40 & n = 20 \\
0 = 38 - 2(m-1) & 2m = 40 & m = 20 \\
Portanto & nm = 40\ dias &
\end{array}
$$

b)
$$
\begin{array}{l}
S_a = \dfrac{(41+3).20}{2} = 440 \\
S_b = \dfrac{(38+0).20}{2} = 380 \\
Portanto \quad S_a + S_b = 820\ cigarros
\end{array}
$$

10 Uma bandeira com três listras horizontais e uma vertical, como é mostrado na figura abaixo, deve ser colorida de modo que regiões adjacentes tenham cores diferentes. Sabendo que há seis cores disponíveis, de quantos modos a bandeira pode ser pintada?



$$\underline{\ 6\ }\ \ \underline{\ 5\ }\ \ \underline{\ 4\ }\ \ \underline{\ 4\ } = 30.16 = 480$$