

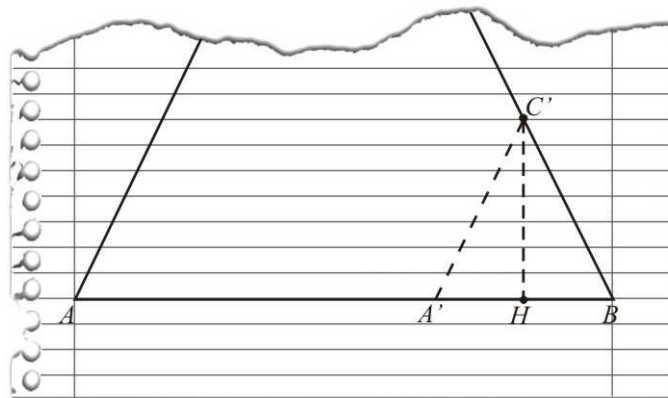
- 1 Um estudante tinha de calcular a área do triângulo  $ABC$ , mas um pedaço da folha do caderno rasgou-se. Ele, então, traçou o segmento  $\overline{A'C'}$  paralelo a  $\overline{AC}$ , a altura  $\overline{C'H}$  do triângulo  $A'BC'$  e, com uma régua, obteve estas medidas:

$$C'H = 1,2\text{cm}, A'B = 1,4\text{cm} \text{ e } AB = 4,2\text{cm}.$$

**A** Use essas medidas e calcule a área do triângulo  $ABC$ .

**B** Com a régua, ele mediu também o lado  $\overline{A'C'}$  e obteve  $A'C' = 1,5\text{cm}$ .

Se as medidas em graus dos ângulos agudos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são respectivamente  $a$  e  $b$ , calcule o valor de  $\text{sen}(a - b)$ .



**A**

Por semelhança dos triângulos  $ABC$  e  $A'BC'$  e chamando de  $h$  a altura do triângulo  $ABC$ , teremos:

$$\frac{4,2}{1,4} = \frac{h}{1,2} \Rightarrow h = 3,6. \text{ Portanto a área do triângulo } ABC \text{ vale } \frac{(4,2)(3,6)}{2} = 7,56\text{cm}^2$$

**B**

$$\text{Temos: } \text{sen } a = \frac{1,2}{1,5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \text{ e } \cos a = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

Chamando  $A'H$  de  $x$  teremos:  $1,5^2 = x^2 + 1,2^2 \Rightarrow x = 0,9$ . Logo,  $HB = 1,4 - 0,9 = 0,5$ .

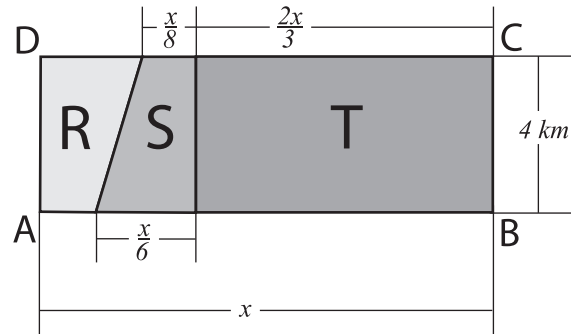
Chamando de  $y$  o lado  $\overline{BC'}$  teremos,  $y^2 = 1,2^2 + 0,5^2 \Rightarrow y = 1,3$ .

$$\text{Assim, } \text{sen } b = \frac{1,2}{1,3} = \frac{12}{13} \text{ e } \cos b = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{Logo, } \text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cos b - \text{sen } b \cos a = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{16}{65}$$

- 2 Um meteorito foi detectado por astrônomos nas proximidades da Terra e cálculos feitos mostraram que ele deveria atingir a superfície em uma região deserta, com a forma de um retângulo ABCD. Sabe-se que a área da região S, que tem a forma de um trapézio retângulo, mede  $7 \text{ km}^2$ .

Expresse, em porcentagem, a probabilidade de o meteorito cair na região R ou na região T.



$$\text{Área S: } \left(\frac{x}{8} + \frac{x}{6}\right) \cdot \frac{4}{2} = \frac{7x}{12} = 7 \Rightarrow x = 12$$

$$\text{Área do retângulo ABCD: } 12(4) = 48$$

$$\text{Área T: } \frac{2x}{3} \cdot 4 = \frac{24}{3} \cdot 4 = 32$$

$$\text{Área R: } 48 - 7 - 32 = 9$$

Portanto, a probabilidade do meteorito cair na região R ou na região T é:  $\frac{9 + 32}{48} = 85,42\%$

- 3** A onça-pintada, também conhecida por **jaguar** ou **jaguetê**, costuma ser encontrada em reservas florestais e matas cerradas, mas, atualmente, é um dos carnívoros brasileiros que corre perigo de extinção. Suponha que, em determinada região, a população de onças-pintadas,  $P(t)$ , daqui a  $t$  anos, será estimada pela função:  $P(t) = 60(1 + e^{-0,05t})$ . O número  $e$  pode ser calculado com tanta precisão quanto se queira, mas, nesta questão, aproxime-o, quando necessário, para 2,7.
- A** Faça uma estimativa da população de onças-pintadas que habitarão essa região daqui a vinte anos. Aproxime a resposta para o número inteiro mais próximo.
- B** Se mantiver esse decréscimo, daqui a quantos anos será atingido o ponto em que a extinção é inevitável, considerada pelos biólogos em cem indivíduos? Utilize esses valores para os logaritmos neperianos de 2 e 3:  $\ln 2 = 0,69$ ;  $\ln 3 = 1,10$ .



**A**

$$P(20) = 60(1 + e^{-1}) = 60(1 + \frac{1}{e}) = 60(1 + 0,37) = 82,20 \cong 82.$$

Daqui a 20 anos, a população de onças pintadas será de, aproximadamente, 82 indivíduos.

**B**

$$100 = 60(1 + e^{-0,05t})$$

$$1 + e^{-0,05t} = \frac{10}{6}$$

$$e^{-0,05t} = \frac{2}{3}$$

$$-0,05t = \ln \frac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3$$

$$-0,05t = 0,69 - 1,1 \Rightarrow t = 8,2 \text{ anos}$$

Daqui a aproximadamente 8 anos será atingido o ponto em que a extinção é considerada inevitável.

- 4 Uma editora decidiu disponibilizar o lançamento de um novo livro em duas versões: uma mais elaborada, com capa dura, e outra, popular, com capa de papelão. Uma pesquisa contratada pela editora registrou que, no dia do lançamento, o lucro da editora poderia ser estimado pela função:

$$L = (25 - 0,5x)x + (30 - y)y - (50 - 0,5x - y)^2$$

em que  $x$  é o preço do exemplar de capa dura e  $y$ , o preço do exemplar com capa de papelão, em reais. O departamento de produção da editora decidiu que o exemplar de capa dura deveria custar o dobro do preço do exemplar de capa de papelão. Buscando obter o maior lucro possível, o diretor de vendas estabeleceu estes preços para as duas versões:

capa dura  $\rightarrow$  R\$ 50,00          capa de papelão  $\rightarrow$  R\$ 25,00

Foi correta a decisão do diretor de vendas? Por quê?

Como  $x = 2y$ , substituindo na expressão do lucro, teremos:

$$L = (25 - y)2y + (30 - y)y - (50 - y - y)^2$$

$$L = -7y^2 + 280y - 2500 \text{ (Parábola com concavidade voltada para baixo)}$$

Assim, o ponto de máximo é dado pela abscissa do vértice, isto é:

$$y = \frac{-b}{2a} = \frac{-280}{-14} = 20.$$

Como  $x = 2y \Rightarrow x = 40$ .

A decisão do diretor de vendas não foi correta. Ele deveria ter estabelecido os preços: capa dura: R\$ 40,00; capa de papelão: R\$ 20,00.

- 5 Uma empresa recebeu uma verba de R\$ 1 600,00 que deve ser utilizada integralmente para fabricar bolas de tênis. A empresa possui máquinas, cada uma das quais é capaz de produzir, automaticamente, vinte bolas por hora. O custo de preparar e programar as máquinas é de R\$ 80,00 por máquina, para qualquer tempo de utilização. Além disso, são necessários dois trabalhadores para supervisionar todas as máquinas, cada um dos quais recebe R\$ 20,00 por hora. Quantas máquinas devem ser usadas para produzir o maior número de bolas possível? Quantas bolas de tênis serão produzidas com essa verba?

Seja  $x$  o número de máquinas utilizadas e  $y$  o número de horas empregadas:

Temos:

$$(I): 80x + 2(20)y = 1600 \Rightarrow y = 40 - 2x$$

$$(II): \text{Queremos maximizar a função } N = 20xy$$

Substituindo (I) em (II), teremos:

$$N = 20x(40 - 2x) = -40x^2 + 800x$$

O valor de  $x$  que maximiza  $N$  é a abscissa do vértice da parábola dada por  $N$ , isto é:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-800}{-80} = 10$$

De (I) obtemos que  $y = 40 - 2(10) = 20$ .

Conclusão: precisamos de 10 máquinas trabalhando durante 20 horas e serão fabricadas  $N = 20 \cdot 10 \cdot 20 = 4000$  bolas de tênis.

**6**

**A** Determine  $a$  e  $b$  de forma que a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2a & 0,5b \end{bmatrix}$  verifique que  $A^2 = 2A$  e depois calcule  $A^{11}$ .

**B** Nos meses de abril e maio, uma família adquiriu as mesmas quantidades de açúcar, arroz e feijão em um mesmo supermercado, mas os preços sofreram uma leve alteração:

Preço por quilo		Abril	Maior
	Açúcar	R\$ 1,00	R\$ 1,20
	Arroz	R\$ 2,50	R\$ 2,00
	Feijão	R\$ 3,00	R\$ 3,00

Quantidade de pacotes de 1 kg		
Açúcar	Arroz	Feijão
4	5	6

Mediante um produto de matrizes, expresse, por meio de uma matriz, quanto a família gastou em cada mês.

**A**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1+2a & 1+0,5b \\ 2a+ab & 2a+0,25b^2 \end{bmatrix} \text{ e } 2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4a & b \end{bmatrix}$$

Igualando os elementos correspondentes obtemos  $a = \frac{1}{2}$  e  $b = 2$ .

$$\text{Assim, } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; A^4 = A^2 A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}; A^8 = A^4 A^4 = \begin{bmatrix} 128 & 128 \\ 128 & 128 \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = A^2 A^8 = \begin{bmatrix} 512 & 512 \\ 512 & 512 \end{bmatrix} \text{ e } A^{11} = A A^{10} = \begin{bmatrix} 1024 & 1024 \\ 1024 & 1024 \end{bmatrix}.$$

**B**

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2,5 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1,20 \\ 2,5 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34,5 & 32,80 \end{bmatrix}$$

A família gastou R\$ 34,50 em abril e R\$ 32,80, em maio.

- 7 A História da Matemática apresenta muitos problemas para resolver mediante sistemas de equações, mas cujos enunciados indicam que as soluções são números naturais. Resolva este antigo problema:

*Dois viajantes encontraram uma bolsa que continha entre 150 e 200 moedas de ouro. O primeiro disse para o segundo: "Se eu ficar com metade do dinheiro que há na bolsa, vou me tornar o dobro de rico que você, se não contar o dinheiro que levo comigo".*

*O segundo disse para o primeiro: "Se eu ficar com dois terços do dinheiro da bolsa, eu terei, com o que levo, o triplo da quantia que você leva consigo".*

*Quantas moedas de ouro continha a bolsa? Que quantia levava cada um dos amigos?*

Quantia que levava o 1º viajante →  $x$

Quantia que levava o 2º viajante →  $y$

Quantia que havia na bolsa →  $z$

$$\begin{cases} \frac{z}{2} = 2y \\ \frac{2}{3}z + y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - z = 0 \\ 9x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{z}{4}$$

$$9x - \frac{3z}{4} - 2z = 0 \Rightarrow x = \frac{11z}{36}$$

Observe que  $z$  deve ser um múltiplo de 36.

$x = \frac{11z}{36}$	$y = \frac{z}{4}$	$z$
0	0	0
11	9	36
22	18	72
33	27	108
44	36	144
55	45	180
66	54	216
.	.	.
.	.	.
.	.	.

A bolsa continha 180 moedas de ouro.

O 1º amigo levava 55 moedas e o segundo, 45.

**8** Em uma festa de final de ano, dez funcionários de uma pequena empresa de consultoria se reúnem para participar do “amigo secreto”. Cada um traz um presente que é distribuído, ao acaso, entre os dez.

**A** Quantas possibilidades há de distribuir os presentes?

**B** Qual é a probabilidade de certo funcionário receber exatamente o presente que trouxe?

**A**

Há  $10!$  possibilidades de distribuir os presentes.

**B**

A probabilidade de certo funcionário receber exatamente o presente que trouxe é:

$$\frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$$



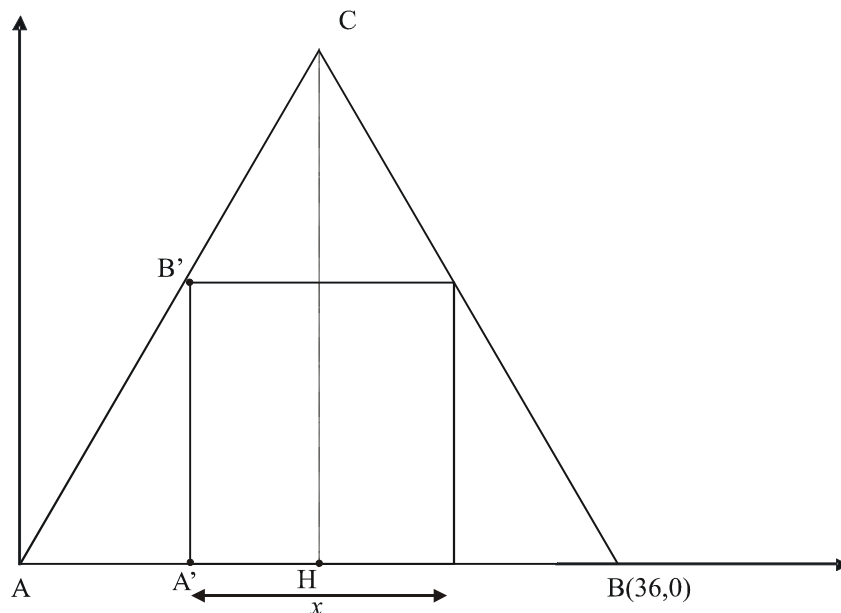
**9**

**A** Determine o comprimento do lado de um quadrado, sabendo que um de seus lados está contido no lado  $\overline{AB}$  de um triângulo equilátero  $ABC$ , e os outros dois vértices pertencem aos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ . Dados:  $A(0,0)$ ,  $B(36,0)$ , e o terceiro vértice,  $C$ , está no 1º quadrante. Considere as medidas dos lados do triângulo expressas em metros.

**B** Um engenheiro pretende construir uma piscina em seu sítio, dentro de um terreno que tem a forma de um triângulo equilátero e a mesma área do triângulo do item A desta mesma questão. A piscina deve ter cerca de 1,5 m de profundidade, deve ocupar a maior área possível, e a borda deve ter a forma de uma circunferência.

De quantos litros de água, aproximadamente, ele vai necessitar, para encher completamente a piscina?

Se necessário, utilize o valor 3,14 para  $\pi$ .

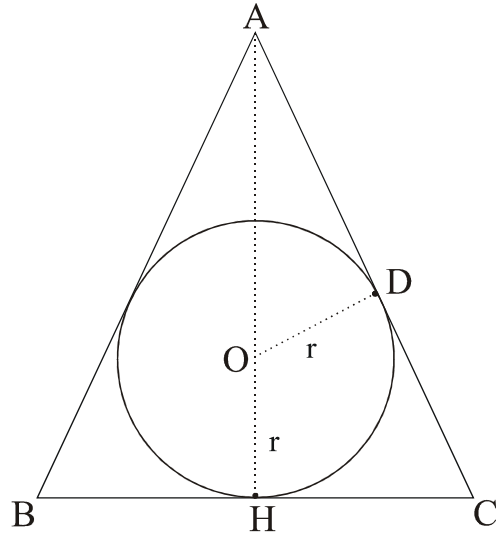
**A**


Por semelhança de triângulos  $AA'B$  e  $AHC$ :

$$\frac{x}{18 - \frac{x}{2}} = \frac{18\sqrt{3}}{18} \Rightarrow x = 18\sqrt{3} - x \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 72\sqrt{3} - 108$$

O lado do quadrado mede  $(72\sqrt{3} - 108)$  metros.

B



Por semelhança de triângulos AOD e ACH:

$$\frac{r}{18} = \frac{18\sqrt{3} - r}{36} \Rightarrow r = 6\sqrt{3}m$$

O volume da piscina é igual a:

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi (6\sqrt{3})^2 \cdot 1,5$$

$$V = 508680 \text{ litros}$$

Serão necessários aproximadamente 508680 litros de água para encher a piscina.

**10** O conhecimento que temos da matemática na Antigüidade vem, em boa parte, de textos matemáticos redigidos por escribas, propondo problemas para os alunos ou outros escribas resolverem. Leia com atenção esta adaptação do texto "Sou o escriba, o chefe dos trabalhadores", e resolva o problema que o autor propõe como um desafio a outro escriba:

**A** *Temos de resolver um problema e calcular certa taxa de juro. Um velho mercador emprestou um capital de 8 moedas de ouro, a certa taxa anual de juro composto, durante três anos. Passado esse tempo, o velho mercador ficou muito contente: somente de juros, ele recebeu 19 moedas de ouro!*

*Os escribas estarão todos reunidos para descobrir a taxa de juro da aplicação, mas nenhum saberá como fazê-lo. Voltar-se-ão para ti e te dirão: "Tu és um escriba hábil, meu amigo! Responde rápido para nós, honra tua reputação, para que não se possa dizer que existe alguma coisa que o chefe dos escribas não saiba: a que taxa anual de juro composto o mercador aplicou o seu dinheiro?"*

**B** *Para encontrar a taxa de juro, você resolveu uma equação polinomial do terceiro grau. Quais são as outras duas raízes dessa equação?*

**A**

$$8(1+x)^3 - 8 = 19$$

$$(1+x)^3 = \frac{27}{8}$$

$$1+x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 0,5 = \frac{50}{100} = 50\%$$

O mercador aplicou o seu capital à taxa de juro composto de 50% ao ano.

**B**

$$(1+x)^3 = \frac{27}{8}$$

$$1+3x+3x^2+x^3 = \frac{27}{8}$$

$$8x^3 + 24x^2 + 24x - 19 = 0$$

Conhecemos uma raiz: 0,5

$$\begin{array}{r|rrrr} 0,5 & 8 & 24 & 24 & -19 \\ & & 4 & 14 & 19 \\ \hline & 8 & 28 & 38 & 0 \end{array}$$

$$8x^2 + 28x + 38 = 0$$

$$4x^2 + 14x + 19 = 0 \Rightarrow x = \frac{-14 \pm 6i\sqrt{3}}{8}$$

As outras duas raízes são  $-\frac{7}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$  e  $-\frac{7}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$