1 Numa loja, os preços dos produtos expostos na vitrine incluem um acréscimo de 50% sobre o preço de custo.
Durante uma liquidação, o lojista decidiu vender os produtos com um lucro real de 20% sobre os preços de custo.

A Calcule o desconto que ele deve dar sobre os preços da vitrine.

B Quando não há liquidação, sua venda é a prazo, com um único pagamento após dois meses e uma taxa de juros compostos de 10% ao mês. Nessa condição, qual será a porcentagem do lucro sobre o preço de custo?

A

$$P = 1{,}5 \cdot C$$

Desconto

$$\therefore P_N = 1{,}2 \cdot C$$

$$\therefore D = \frac{P - P_n}{P} = \frac{1{,}5C - 1{,}2C}{1{,}5C} = \frac{0{,}3}{1{,}5} = 0{,}2 = 20\%$$

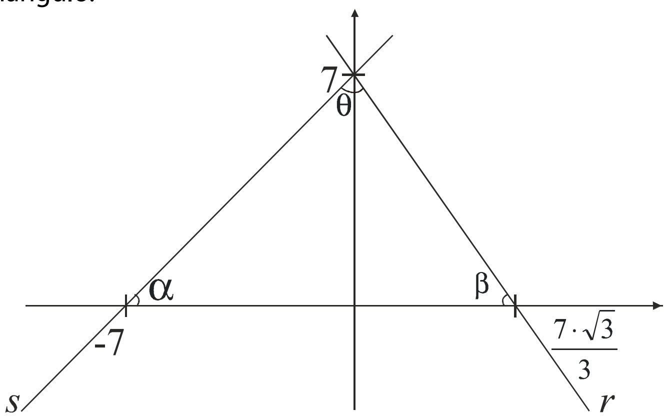
B

$$M = P \cdot (1{,}1)^2 = 1{,}5C \cdot 1{,}21 = 1{,}815C$$

$$M = 1{,}815C \Rightarrow \%Lucro = 81{,}5\%$$

2 No plano cartesiano, são dadas as retas r de equação $y = -\sqrt{3}x + 7$, e s de equação $y = x + 7$. Se θ é a medida, em graus, do maior ângulo do triângulo formado pelas retas r, s e o eixo x, determine:

A o valor do ângulo θ.
B a área desse triângulo.



A

$r: y = -\sqrt{3}\cdot x + 2$

$s: y = x + 7$

$tg\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^o$

$tg\beta = \sqrt{3} \Rightarrow \beta = 60^o$

$\therefore \theta + \alpha + \beta = 180^o \Rightarrow \theta = 180^o - 45^o - 60^o = 75^o$

$\theta = 75^o$

B

$$A = \frac{\left(\frac{7\sqrt{3}}{3} + 7\right)\cdot 7}{2} = \frac{49(\sqrt{3}+3)}{6}$$

3 Uma prova discursiva de matemática deve conter 5 questões de álgebra, 3 questões de geometria e 2 de trigonometria, num total de 10 questões.
Para elaborar a prova, a banca dispõe de 8 questões de álgebra, 6 de geometria e 4 de trigonometria.

A Com as informações dadas, quantas provas distintas, isto é, que tenham ao menos uma questão diferente, podem ser elaboradas?

B Do total das 18 questões disponíveis, 14 são difíceis e 4 de álgebra são médias. Qual a probabilidade de se elaborar uma prova difícil, sabendo que ela deve conter pelo menos 7 questões difíceis?

A $C_{8,5} \cdot C_{6,3} \cdot C_{4,2} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 56 \cdot 20 \cdot 6 = 6720$

B

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r} 2\,difíceis \\ 3\,médias \end{array}\right\} C_{4x2} \cdot C_{4x3} = 6.4 = 24 \\
\left.\begin{array}{r} 3\,difíceis \\ 2\,médias \end{array}\right\} C_{4x3} \cdot C_{4x2} = 4.6 = 24 \\
\left.\begin{array}{r} 4\,difíceis \\ 1\,média \end{array}\right\} C_{4x4} \cdot C_{4x1} = 1.4 = 4
\end{array}\right\} \text{24+24+4=52}$$

$$Total\ de\ combinações \Rightarrow C_{8,5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$probabilidade = \frac{52}{56} = \frac{13}{14}$$

4 Seja a seqüência $3, \sqrt[2]{3}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[8]{3}, \ldots\ldots$, cujos termos são radicais de radicando 3, e o índice de cada termo é o dobro do índice do termo anterior. Calcule o produto:

A dos 10 primeiros termos dessa seqüência.
B dos infinitos termos dessa seqüência.

$$3, 3^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{8}}, \ldots$$

A $P_{10} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \cdot \ldots = 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}$

$$\exp oente\ é\ a\ soma\ da\ PG\ de\ razão\ \frac{1}{2}$$

$$S_{10} = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^{10}}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{512}$$

$$\therefore P_{10} = 3^{\frac{1023}{512}} = \sqrt[512]{3^{1023}}$$

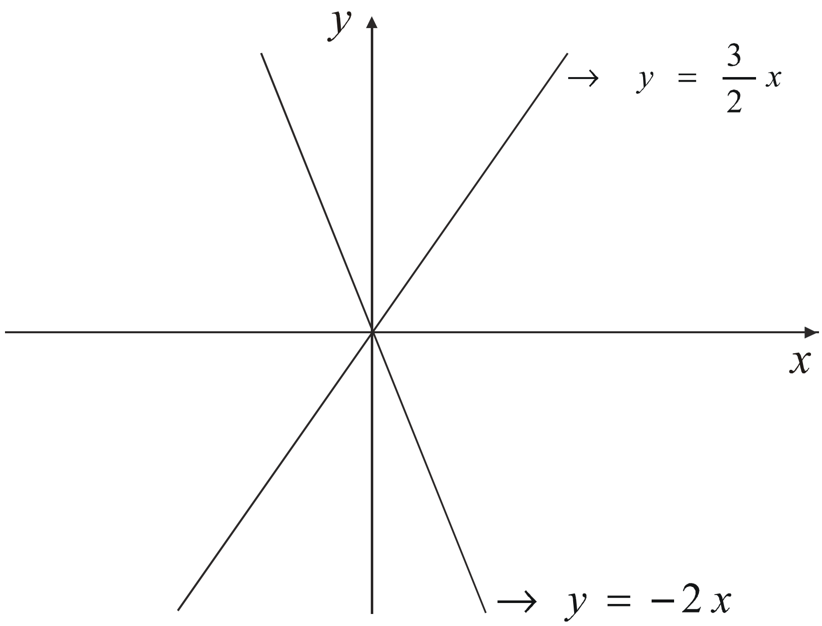
B $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$$P = 3^2 = 9$$

5 Considere, no sistema cartesiano ortogonal, os pontos (x,y) que constituem o gráfico da equação $2y^2 + xy - 6x^2 = 0$. Construa esse gráfico no plano cartesiano.

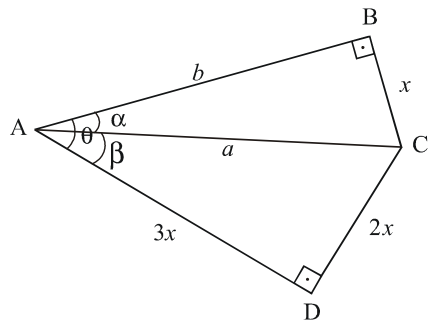
Incógnita y

$$2y^2 + xy - 6x^2 = 0$$
$$\Delta = x^2 - 4 \cdot 2 \cdot -6x^2$$
$$\Delta = 49x^2$$
$$y = \frac{-x \pm 7x}{4} \Rightarrow y = -2x$$
$$ou$$
$$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$



6 No quadrilátero $ABCD$ mostrado na figura abaixo, $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são ângulos retos, $BC = x$, $CD = 2x$, $AD = 3x$ e $\hat{A} = \theta$. Determine:

A o comprimento dos segmentos AC e AB em função de *x*.
B o valor de $sen\theta$.



A $a^2 = (2x)^2 + (3x)^2 \Rightarrow a^2 = 13x^2$

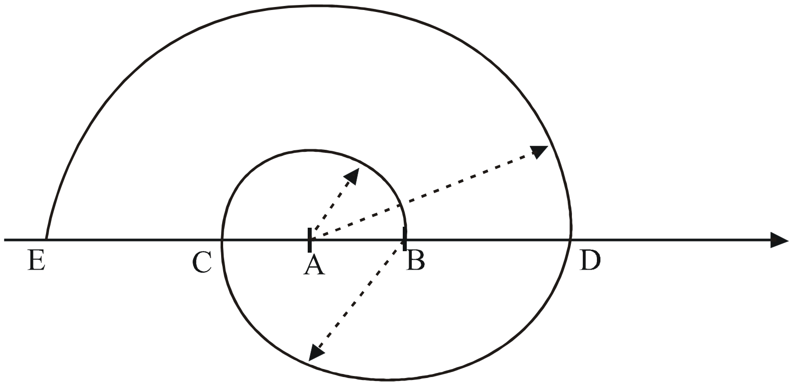
$$a = x \cdot \sqrt{13}$$
$$a^2 = b^2 + x^2 \Rightarrow b^2 = 12x^2$$
$$b = x \cdot \sqrt{12}$$

$$sen\alpha = \frac{x}{a} = \frac{x}{x \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{a} = \frac{x \cdot \sqrt{12}}{x \cdot \sqrt{13}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$
$$sen\beta = \frac{2x}{a} = \frac{2x}{x \cdot \sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$
$$\cos\beta = \frac{3x}{a} = \frac{3x}{x \cdot \sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

B $sen\theta = sen(\alpha + \beta)$

$$sen\theta = sen\alpha \cdot \cos\beta + sen\beta \cdot \cos\alpha$$
$$sen\theta = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$
$$sen\theta = \frac{3}{13} + \frac{4\sqrt{3}}{13} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{13}$$
$$sen\theta = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{13}$$

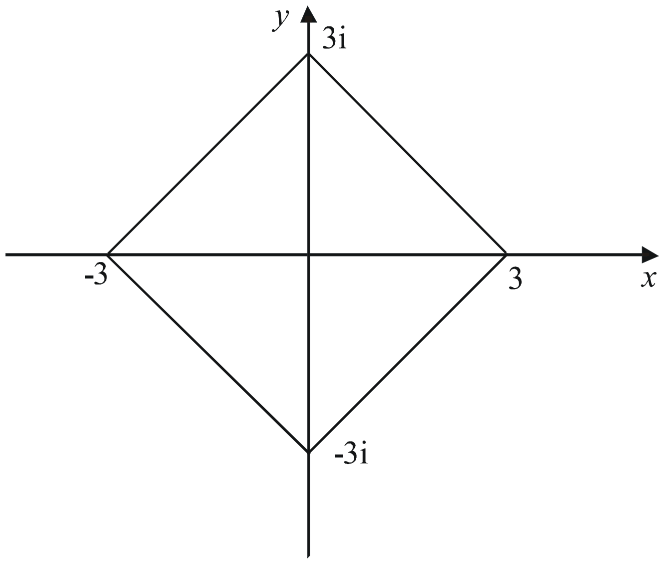
7 Chamamos de falsa espiral de dois centros aquela construída da seguinte forma: os dois centros são os pontos A e B. Traçam-se semicircunferências no sentido anti-horário, a primeira com o centro em A e raio AB, a segunda com centro em B e raio BC, a terceira com centro em A e raio AD, repetindo esse procedimento em que os centros se alternam entre A e B, como mostrado na figura abaixo.



Determine a distância entre A e B se, ao completar duzentas semicircunferências, o comprimento total dessa falsa espiral for 100500π metros.

$$P.A.: \pi \cdot r; \pi \cdot 2r; \pi \cdot 3r; ...$$
$$razão \ \ q = \pi . r$$
$$S_{200} = \frac{(\pi \cdot r + \pi \cdot 200r) \cdot 200}{2} = 100 \cdot 201 \cdot \pi r =$$
$$S_{200} = 20100\pi r = 100500\pi$$
$$r = \frac{100500\pi}{20100\pi} = 5$$
$$r = 5m$$

8 Os vértices do quadrado na figura abaixo representam, no plano de Argand – Gauss (plano complexo), todas as raízes de um polinômio $p(x)$ cujo coeficiente do termo de maior grau é 1.



A Determine a expressão do polinômio $p(x)$.

B Calcule o resto da divisão de $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

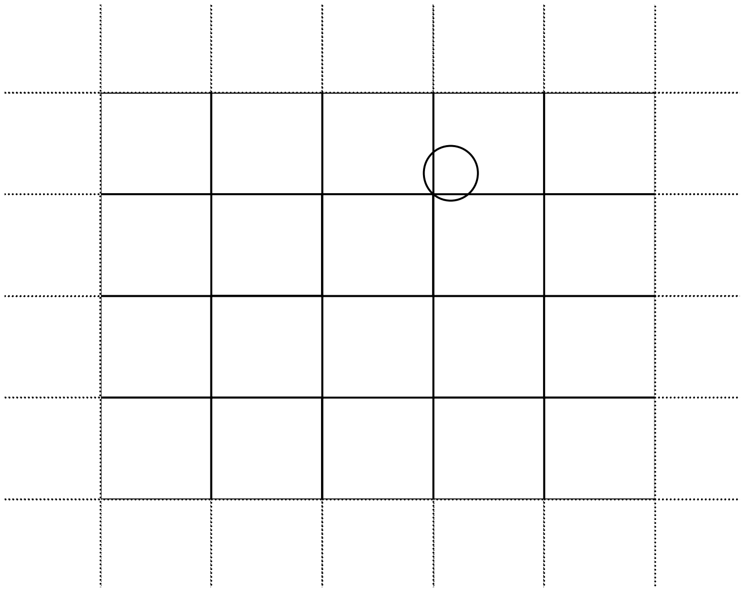
A
$$\begin{aligned} P(x) &= (x-3)\cdot(x+3)\cdot(x-3i)\cdot(x+3i) \\ &= (x^2-3^2)\cdot(x^2-(3i)^2) \\ &= (x^2-3^2)\cdot(x^2+3^2) \\ &= [(x^2)^2-(3^2)^2] \\ &= x^4-81 \end{aligned}$$

B

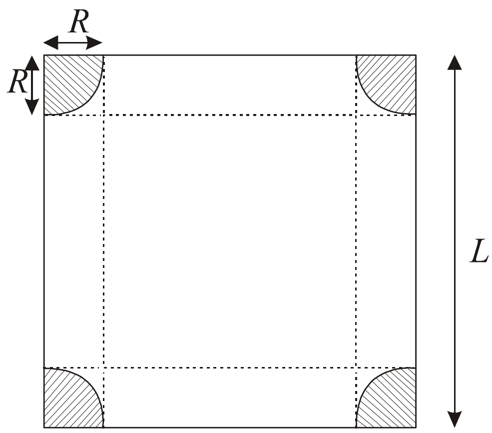
$$\begin{array}{r|l} x^4 \qquad\qquad\qquad -81 & x^3-2x^2+4x-8 \\ \cline{2-2} -x^4+2x^3-4x^2+8x \qquad & x+2 \\ \cline{1-1} 2x^3-4x^2+8x-81 & \\ -2x^3+4x-8x+16 & \\ \cline{1-1} -65 & \end{array}$$

$\therefore\ resto = -65$

9 Considere um piso composto por placas quadradas e justapostas de lado L, e um anel de raio $R < L/2$, como mostra a figura abaixo.



Lançando o anel sobre esse piso, determine a probabilidade de o círculo delimitar regiões contidas em, no máximo, três placas.

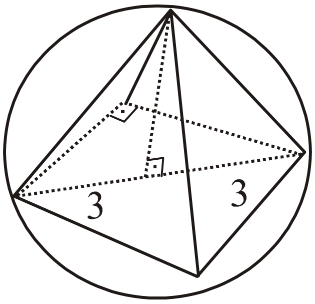


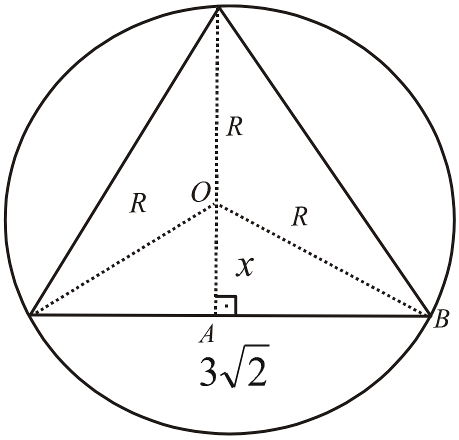
$$P = \frac{L^2 - \pi R^2}{L^2} = 1 - \frac{\pi R^2}{L^2}$$

10 Considere uma pirâmide regular de altura $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cuja base é um quadrado de lado 3. Calcule:

A o volume da pirâmide.
B o raio da esfera circunscrita à pirâmide.

A





$$volume \rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$$

B

$O \rightarrow centro\ da\ esfera$

ΔOAB

$$x^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - R\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R^2$$

$$\frac{27}{2} - 3\sqrt{6}R + R^2 + \frac{9}{2} = R^2$$

$$3\sqrt{6}R = 18$$

$$R = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$