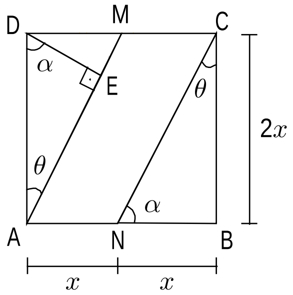
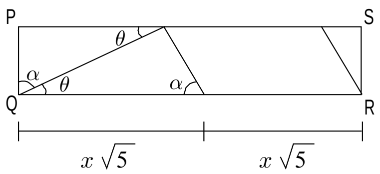
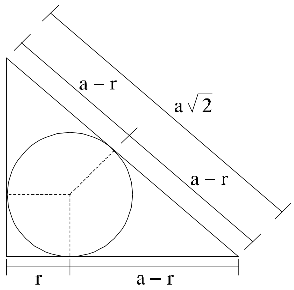
PADRÃO DE RESPOSTAS

(VALOR DE CADA QUESTÃO = 2 PONTOS)

Questão	Resposta
1	(12.000, 11.400, 10.800,..., a_n, ...) P.A. $a_1 = 12.000$ e $r_a = -600$ (300, 600, 900,..., b_n, ...) P.A. $b_1 = 300$ e $r_b = 300$ $a_n = b_n$ $\Rightarrow a_1 + (n-1)\, r_a = b_1 + (n-1)\, r_b$ $\Rightarrow 12.000 + (n-1)(-600) = 300 + (n-1)(300)$ $\Rightarrow 12.000 - 300 = (n-1)(600 + 300)$ $\Rightarrow 11.700 = (n-1)\, 900$ $\Rightarrow 13 = n - 1$ $\Rightarrow n = 14$ $\Rightarrow$ 1 ano + 2 meses $\Rightarrow$ fevereiro de 2011
2	 $\overline{CN}^2 = \overline{NB}^2 + \overline{BC}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{CN}^2 = x^2 + 4x^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{CN} = x\sqrt{5}$ $\overline{MC} = \dfrac{\overline{CD}}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{MC} = x$ A seguinte relação é válida para o triângulo ADM: $x\sqrt{5} \times \overline{DE} = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{DE} = \dfrac{2x}{\sqrt{5}}$  Como $\overline{PQ} = \overline{DE}$, pode-se obter a razão: $\dfrac{\overline{PS}}{\overline{PQ}} = \dfrac{2x\sqrt{5}}{\dfrac{2x}{\sqrt{5}}} = 5$
3	$n = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ $m = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ Logo: $n - m = 20 - 10 = 10$

4	$\frac{1}{2} = \frac{12+n}{12+n+15}$ $\Rightarrow 12 + n + 15 = 2\,(12 + n) \quad \Rightarrow \quad n + 27 = 24 + 2n \quad \Rightarrow \quad 27 - 24 = 2n - n \quad \Rightarrow \quad n = 3$
5	 Relação entre a aresta *a* do cubo e o raio *r* do cilindro: $2a - 2r = a\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{a} = \frac{(2-\sqrt{2})}{2}$ Logo: $V_{(cilindro)} = \pi r^2 \times a$ e $V_{(cubo)} = a^3$ Assim: $\frac{V_{(cilindro)}}{V_{(cubo)}} = \frac{\pi r^2 \times a}{a^3} = \pi \times \left(\frac{r}{a}\right)^2 = \pi \frac{(2-\sqrt{2})^2}{4}$
6	$A = \frac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{ab}$ e $H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ A sequência (A, G, H) é uma P.G. de razão $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $G = A \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ $ab = \frac{3(a+b)^2}{16} \quad \Rightarrow \quad 16\,ab = 3(a^2 + 2\,ab + b^2) \quad \Rightarrow \quad 3\,a^2 - 10\,ab + 3\,b^2 = 0$ $\Rightarrow a = \frac{10b \pm \sqrt{(-10b)^2 - 4 \times 3 \times (3b^2)}}{2 \times 3} = \frac{10b \pm \sqrt{100b^2 - 36b^2}}{6} = \frac{10b \pm 8b}{6}$ $\Rightarrow a = 3b$ ou $a = \frac{2}{3}b$ *a* e *b* são números reais positivos com $a > b$, logo: $\frac{a}{b} = 3$.
7	$\overline{PC} = \overline{AQ} = y$ $\overline{AD} = \overline{DP} = x$ $2y + 4x = 800 \quad \Rightarrow \quad y + 2x = 400 \quad \Rightarrow \quad y = 400 - 2x$ $S = yx = (400 - 2x)\,x = -2x^2 + 400x$ Logo: $S_{máxima} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(160000 - 0)}{-8} = 20.000\,m^2$

8	Sejam: x = número de atletas que marcaram 13 gols y = número de atletas que marcaram 14 gols z = número de atletas que marcaram 15 gols Logo: $13x + 14y + 15z = 125$ $y + z = 5 \Rightarrow z = 5 - y$ e $0 \leq y \leq 5$ $13x + 14y + 15(5 - y) = 125 \Rightarrow 13x + 14y + 75 - 15y = 125$ $\Rightarrow 13x - y = 50 \Rightarrow 13x - 50 = y$ $0 \leq y \leq 5 \Rightarrow 0 \leq 13x - 50 \leq 5 \Rightarrow 50 \leq 13x \leq 55 \Rightarrow \frac{50}{13} \leq x \leq \frac{55}{13} \Rightarrow x = 4$ Portanto: $y = 13x - 50 = 13 \times 4 - 50 = 2$ $z = 5 - y = 3$ O número de atletas que fizeram 15 gols é igual a 3.
9	$\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y) = k$ $\log_9 x = k \Rightarrow 9^k = x$ $\log_6 y = k \Rightarrow 6^k = y$ $\log_4 (x + y) = k \Rightarrow 4^k = (x + y)$ $4^k = 9^k + 6^k \Rightarrow 4^k - 6^k - 9^k = 0 \Rightarrow (2^k)^2 - 3^k (2^k) - 3^{2k} = 0$ Considerando $z = 2^k$: $z^2 - 3^k z - 3^{2k} = 0 \Rightarrow z = \frac{3^k \pm \sqrt{3^{2k} + 4 \times 3^{2k}}}{2} = \frac{3^k \pm 3^k \sqrt{5}}{2}$ Como z é positivo: $z = \frac{3^k + 3^k\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{2^k}{3^k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ Portanto: $\frac{y}{x} = \frac{6^k}{9^k} = \left(\frac{6}{9}\right)^k = \frac{2^k}{3^k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

10	Substitui-se z^3 por y na equação $z^6 + z^3+1 = 0$: $y^2+y+1=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \quad \Rightarrow \quad y_1=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $y_2=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ Para determinar as raízes cúbicas de um número complexo w = ρ $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, usa-se a seguinte relação: $w_k=\sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\times\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right], k\in\{0,1,2\}.$ Portanto, as raízes cúbicas do número complexo $y_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ são determinadas por: $w_0=\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)+i\times\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right], w_1=\left[\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)+i\times\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{9}\right)\right], w_2=\left[\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)+i\times\operatorname{sen}\left(\frac{14\pi}{9}\right)\right]$ Analogamente, as raízes cúbicas do número complexo $y_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=1\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$ são determinadas por: $w_3=\left[\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+i\times\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right], w_4=\left[\cos\left(\frac{10\pi}{9}\right)+i\times\operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{9}\right)\right], w_5=\left[\cos\left(\frac{16\pi}{9}\right)+i\times\operatorname{sen}\left(\frac{16\pi}{9}\right)\right]$ Como $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\theta=\arg(w_1)=\frac{8\pi}{9}$