UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
Pró-Reitoria de Graduação - Prograd
Serviço de Seleção, Orientação e Avaliação - SSOA

VESTIBULAR 2008 — 2ª FASE
GABARITO — MATEMÁTICA

QUESTÃO 01 (valor 10 pontos)

Considere x o número inicial de bactérias.

- No final da 1ª semana o número de bactérias é igual a $x - 20\%\, x = 0{,}8\, x$.
- No final da 2ª semana o número de bactérias é igual a $0{,}8x + 10\%\,(0{,}8)x = (1{,}1)(0{,}8)x = 0{,}88x$

Uma vez que, a partir da 3ª semana o número de bactérias cresceu em progressão aritmética de razão 12, tem-se

- No final da 3ª semana o número de bactérias é igual a $0{,}88x + 12$.
- No final da 4ª semana o número de bactérias é igual a $(0{,}88x + 12) + 12$.

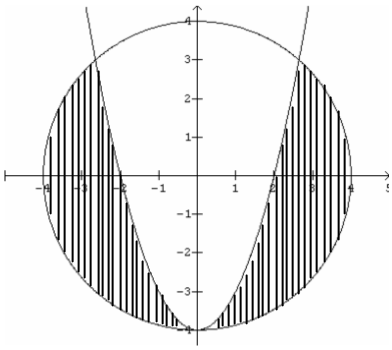
E assim, sucessivamente, até a 15ª semana quando o número de bactérias existentes é igual a x.

O número de bactérias da 2ª até a 15ª semana corresponde a uma progressão aritmética de 14 termos, sendo o 1º termo $a_1 = 0{,}88x$, o 14º termo $a_{14} = x$ e a razão $r = 12$.

Sabendo-se que em uma progressão aritmética $a_n = a_1 + (n-1)r$ tem-se que $a_{14} = a_1 + 13(12)$, portanto, $x = 0{,}88x + 156$, ou seja é $x = \dfrac{156}{0{,}12} = 1300$.

Logo, no início da pesquisa havia 1300 bactérias.

Questão 02 (valor 20 pontos)



O conjunto A está representado pela parte hachurada da figura ao lado.
O conjunto D corresponde às abcissas dos pontos de intersecção de A com o eixo OX.
Logo, $D = [-4, -2] \cup [2, 4]$ é o domínio de f.

Para se encontrar a imagem da função f deve-se analisar a imagem nos dois intervalos cuja união é o conjunto D.

i) Se $x \in [-4, -2]$, então $f(x) = \cos(\frac{px}{4})$.

Calculando os valores nos extremos do intervalo obtém-se $f(-4) = \cos(-p) = -1$ e $f(-2) = \cos(\frac{-p}{2}) = 0$.

Uma vez que a imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$ tem-se que para $x \in [-4, -2]$ a imagem de f é $[-1, 0]$

ii) Se $x \in [2, 4]$, então $f(x) = x^2 - 5x$.

Calculando os valores de f nos extremos do intervalo obtém-se $f(2) = 4 - 10 = -6$ e $f(4) = 16 - 20 = -4$.

Por outro lado, a função quadrática definida pela sentença $x^2 - 5x$ tem um valor mínimo igual à imagem do vértice da parábola correspondente que é $\dfrac{-(25 - 4.0)}{4} = \dfrac{-25}{4}$.

Logo, para $x \in [2, 4]$, a imagem de f é $\left[-\dfrac{25}{4}, -4\right]$.

Conclui-se, portanto, de (i) e (ii) que a imagem da função f é igual a $\left[-\dfrac{25}{4}, -4\right] \cup [-1, 0]$

Questão 03 (valor 15 pontos)

- Dividindo-se o polinômio $A(x) = x^3 + 2x^2 + a_2x + a_3$ por $x^2 + x + 1$, através do algoritmo da divisão, obtém-se quociente igual a $x + 1$ e resto igual a $(a_2 - 2)x + (a_3 - 1)$.
  Uma vez que A(x) é divisível por $x^2 + x + 1$, o resto é zero e pode-se escrever $A(x) = (x^2 + x + 1)(x + 1)$, cujas raízes são -1 e $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
- B(x) é tal que $B(i) = 0$ e $B(1 + i) = 0$ o que equivale a afirmar que i e $1 + i$ são raízes de B e portanto os conjugados $-i$ e $1 - i$ também são raízes, uma vez que B(x) tem coeficientes reais.
  Sendo B(x) um polinômio de grau 5 a raiz em comum que B(x) tem com A(x) é $x = -1$, pois as outras raízes de $x^2 + x + 1$ não são números reais.
  Logo, $B(x) = (x - i)(x + i)(x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)(x + 1)$

Conclui-se, então que $A(0) = 1$, $B(1) = 2.1.2 = 4$ e $A(0) + B(1) = 5$.

Questão 04 (valor 15 pontos)

Tem-se duas informações sobre a matriz A.

i) A comuta com B, ou seja, $AB = BA$, portanto

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & x \\ z & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x + z \\ x = y + w \\ z = 0 \end{cases}$$

Logo, $A = \begin{pmatrix} y+w & y \\ 0 & w \end{pmatrix}$

ii) $A^2 = C$

$$\begin{pmatrix} y+w & y \\ 0 & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y+w & y \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (y+w)^2 & y(y+w)+yw \\ 0 & w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y+w)^2 & y^2+2yw \\ 0 & w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

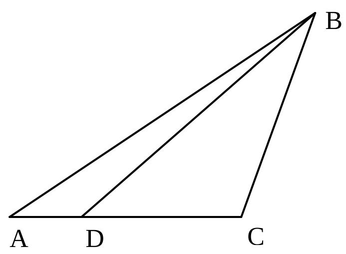
$$\Rightarrow \begin{cases} (y+w)^2 = 16 \\ y^2 + 2yw = 7 \\ w^2 = 9 \end{cases}$$

Uma vez que os elementos de A são não negativos concluí-se que $x = 4$; $y = 1$ e $w = 3$

Logo, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $A^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^t = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Assim, $X = 12A^{-1} + A^t = 12\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ e, portanto, $\det(X) = 50$.

Questão 05 (valor 20 pontos)



De $B\hat{A}C = 45^\circ$ e $B\hat{D}C = 60^\circ$ conclui-se que $A\hat{B}D = 15^\circ$.
Usando a lei dos senos no triângulo ABD obtém-se $\dfrac{\text{sen}(45^\circ)}{\overline{BD}} = \dfrac{\text{sen}(15^\circ)}{5}$.

Assim, $\overline{BD} = \dfrac{5\text{sen}(45^\circ)}{\text{sen}(15^\circ)}$.

Por outro lado,

$$\operatorname{sen}(15^\circ) = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen}45^\circ\cos30^\circ - \operatorname{sen}30^\circ\cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Logo $\overline{BD} = \dfrac{5\operatorname{sen}(45^\circ)}{\operatorname{sen}(15^\circ)} = \dfrac{5\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}} = 5(\sqrt{3}+1)$

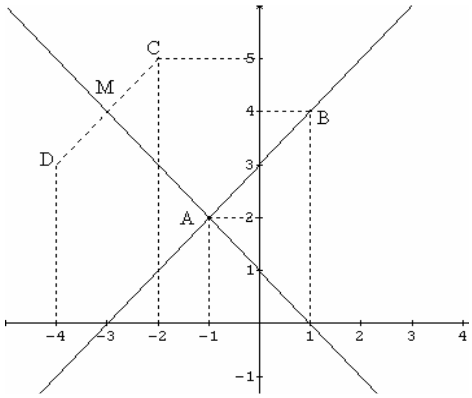
Aplicando a lei dos cossenos no triângulo BDC tem-se:

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{BD})^2 + (\overline{DC})^2 - 2\,\overline{BD}\,\overline{DC}\cos(60^o) \Rightarrow (\overline{BC})^2 = 25\left(\sqrt{3}+1\right)^2 + 100 - 2.10.5\left(\sqrt{3}+1\right)\frac{1}{2} =$$

$$= 25(3 + 2\sqrt{3} + 1) + 100 - 50\sqrt{3} - 50 = 75 + 50\sqrt{3} + 25 + 50 - 50\sqrt{3} = 150 .$$

Logo, $\overline{BC} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$ u.c.

Questão 06 (valor 20 pontos)



Considere r a reta que passa por A(-1, 2) e B(1, 4) e tem equação $y = ax + b$.
Substituindo-se os pontos A e B na equação obtém-se $\begin{cases} 2 = -a + b \\ 4 = a + b \end{cases}$ cuja solução é $a = 1$ e $b = 3$

Logo, a reta r tem equação $y = x + 3$.

Considere s a reta que passa por C e D e é paralela à r , sua equação é da forma $y = x + n$.
Substituindo-se o ponto (-2, 5) obtém-se $n = 7$.
Assim, s tem equação $y = x + 7$.

Considere t a reta que é perpendicular à r e passa por A(–1, 2).
A equação de t é da forma $y = -x + p$.
Substituindo-se o ponto A obtém-se $p = 1$
Logo, t tem equação $y = -x + 1$

Sendo M o ponto de intersecção das retas s e t, suas coordenadas correspondem á solução do sistema $\begin{cases} y = x + 7 \\ y = -x + 1 \end{cases}$, portanto $x = -3$ e $y = 4$.
Logo, M(-3, 4)

Por outro lado, M é ponto médio do segmento DC.

Considerando $D(x_0, y_0)$ tem-se $(-3, 4) = \left(\dfrac{x_0 - 2}{2}, \dfrac{y_0 + 5}{2}\right)$, cuja solução é $x_0 = -4$ e $y_0 = 3$ e, portanto, D(-4, 3).

Obtém-se então $\overline{DC} = d(D, C) = \sqrt{(-4+2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{8}$.

Por outro lado, $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, logo o quadrilátero ABCD é um paralelogramo e sua área é igual a $\overline{AM}\,.\,\overline{DC}$.

Tem-se que $\overline{AM} = d(A, M) = \sqrt{(-3+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8}$ e

$\overline{AM}\,.\,\overline{DC} = \sqrt{8}\,.\,\sqrt{8} = 8$

Portanto, a área do quadrilátero ABCD é igual a 8u.a.

Obs.: Outras formas de resolução poderão ser aceitas, desde que sejam pertinentes.

Em 16 de dezembro de 2007

Nelson Almeida e Silva Filho
Diretor do SSOA/UFBA