Vestibular 2010 — 2ª fase
Gabarito — Matemática

Questão 01 (Valor: 15 pontos)

Considerando-se L_i a soma dos termos da linha i , C_j a soma dos termos da coluna j, D_p a soma dos termos da diagonal principal e D_s a soma dos termos da diagonal secundária, tem-se
$L_1 = (-2x + 3) + (z + 9) + (x + 2y + 1) = -x + 2y + z + 13$
$L_2 = (x + y + 2) + (-y + 8) + (-x + 8) = 18$
$L_3 = (-4z + 5) + (y - z + 1) + (-x + z + 4) = -x + y - 4z + 10$
$C_1 = (-2x + 3) + (x + y + 2) + (-4z + 5) = -x + y - 4z + 10$
$C_2 = (z + 9) + (-y + 8) + (y - z + 1) = 18$
$C_3 = (x + 2y + 1) + (-x + 8) + (-x + z + 4) = -x + 2y + z + 13$
$D_p = (-2x + 3) + (-y + 8) + (-x + z + 4) = -3x - y + z + 15$
$D_S = (-4z + 5) + (-y + 8) + (x + 2y + 1) = x + y - 4z + 14$
Levando-se em conta que as expressões obtidas para L_1 e C_3, assim como as expressões obtidas para L_3 e C_1, são iguais, o sistema pedido pode ser reduzido a um máximo de quatro equações. Além disso, todas as somas devem ser iguais e, como, $L_2 = C_2 = 18$, tem-se

$$\begin{cases} -x+2y+z+13=18 \\ -x+y-4z+10=18 \\ -3x-y+z+15=18 \\ x+y-4z+14=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y+z=5 \\ -x+y-4z=8 \\ -3x-y+z=3 \\ x+y-4z=4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por escalonamento, tem-se

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 & 8 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & -2 & -12 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & -9 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 33 & -33 \\ 0 & 0 & -18 & 18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Assim, $x = -2$, $y = 2$, $z = -1$.

Questão 02 (Valor: 15 pontos)

- Cálculo do vértice da parábola

A abscissa do vértice é a solução da equação

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(2^x - 4\right) = -2 \Rightarrow 2^x - 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow 2^x - 4 = 4 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3.$$

Assim, a parábola tem vértice no ponto V = (3, – 2).

- Cálculo dos coeficientes a_1 , a_2 e a_3

Sendo r a razão da P.G., tem-se $f(x) = a_1 x^2 + (a_1 r)x + (a_1 r^2)$ e, como as coordenadas do vértice em função dos coeficientes são dadas por

$$x_V = -\frac{a_1 r}{2a_1} = -\frac{r}{2} = 3 \quad \text{e} \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a_1} = -\frac{\left(a_1{}^2 r^2 - 4a_1{}^2 r^2\right)}{4a_1} = \frac{3a_1 r^2}{4} = -2,$$

conclui-se que $r = -6$ e $a_1 = -\dfrac{2}{27}$.

Logo $a_6 = a_1 r^5 = -\dfrac{2}{27} \cdot (-6)^5 = 576$.

Questão 03 (Valor: 15 pontos)

- Cálculo de z_1

$$8i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}) \Rightarrow z = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right)\right), \text{ para } k = 0, 1 \text{ e } 2$$

$$k = 0 \Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1 \Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 2 \Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

Assim, $z_1 = -\sqrt{3} + i$.

- Cálculo de z_2

z_2 é uma solução da equação biquadrada $x^4 + x^2 - 12 = 0$.
Usando-se a mudança de variável $x^2 = y$, obtém-se a equação $y^2 + y - 12 = 0$ que tem raízes $y = -4$ e $y = 3$.
Para $y = -4$ conclui-se que $x = \pm 2i$ e para $y = 3$ conclui-se que $x = \pm\sqrt{3}$.
Uma vez que z_2 é uma solução complexa, com parte imaginária positiva, $z_2 = 2i$

$$\left|\sqrt{3}\,\frac{z_1}{z_2} + \bar{z}_2\right| = \left|\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2i}\right) - 2i\right| = \left|-\frac{3}{2i} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2i\right| = \left|\left(\frac{3i}{2} - 2i\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

Logo, $\left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$.

Questão 04 (Valor: 15 pontos)

- Cálculo de g(x)

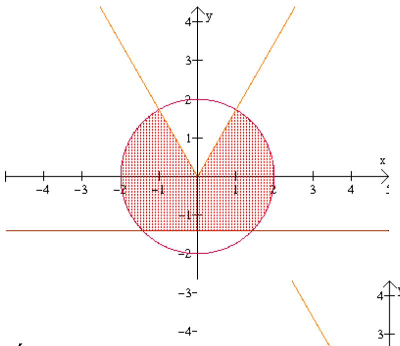
$$0 \le x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \left(\cos x.\cos\frac{\pi}{2} - \text{sen}x.\text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \text{sen}x$$

Logo, $g(x) = 2 - \text{sen}x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

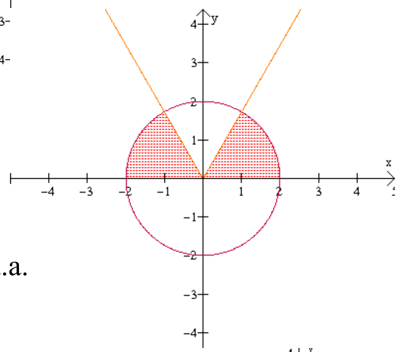
- No intervalo dado, $f(x) = \text{sen}\ x$ e $g(x) = 2 - \text{sen}\ x$, logo a equação a ser resolvida é $\text{sen}^2 x + (2 - \text{sen}x) - \frac{7}{4} = 0$, isto é, $\text{sen}^2 x - \text{sen}x) + \frac{1}{4} = 0$.

Assim, $\left(\text{sen}x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \frac{1}{2},\ x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[$, e $x = \frac{\pi}{6}$.

Questão 05 (Valor: 20 pontos)



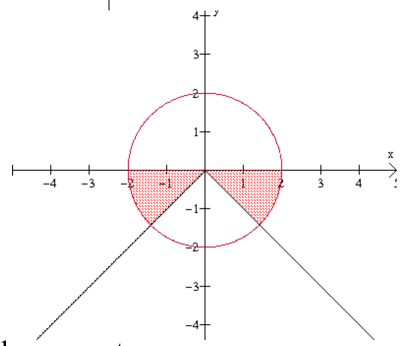
$A \cap B \cap C$ corresponde à região hachurada ao lado e para o cálculo da área pode ser dividida em três regiões.



- Dois setores circulares do círculo de raio igual a 2, de mesma área, limitados pelas retas $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$ e pelo eixo Ox.

  A reta $y = \sqrt{3}x$ tem coeficiente angular igual a $\sqrt{3} = \text{tg}\theta$, sendo θ o ângulo que a reta faz com o eixo Ox.

  Assim, $\theta = 60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$rd e a área do setor circular é $A_1 = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}4\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ u.a.



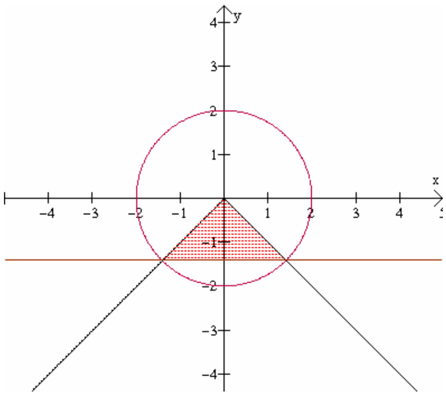
- Dois setores circulares do círculo de raio igual a 2, de mesma área, limitados pelas retas que passam pela origem e pelos pontos de intersecção da circunferência com a reta $y = -\sqrt{2}$.

  Resolvendo o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$ obtém-se $x^2 + 2 = 4$ e portanto $x = \pm\sqrt{2}$

  Assim, os pontos de intersecção são $P_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $P_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e estão sobre as retas $y = x$ e $y = -x$.

  A área do setor circular formado pela reta y = –x, o círculo de raio 2 e o eixo Ox é, portanto,

$A_2 = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}4\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ u.a.



- O triângulo com vértices na origem e nos pontos de intersecção do círculo com a reta $y = -\sqrt{2}$.

Esse triângulo com vértices na origem e nos pontos P_1 e P_2 tem base igual a $2\sqrt{2}$ u.c. e altura $\sqrt{2}$ u.c. Logo área $A_3 = 2$ u.a.

A área da região limitada por $A \cap B \cap C$ é, portanto,

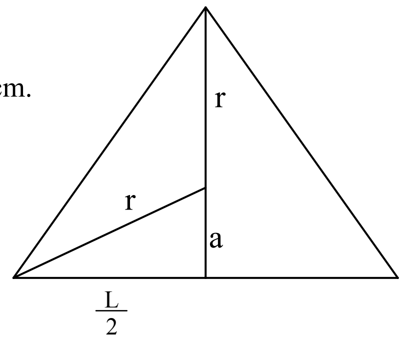
$2A_1 + 2A_2 + A_3 = \dfrac{4\pi}{3} + \pi + 2 = \dfrac{6 + 7\pi}{3}$ u.a.

Questão 06 (Valor: 20 pontos)

A pirâmide está inscrita em um cilindro circular reto de volume igual a $24\pi cm^3$ e área de cada base igual a $4\pi cm^2$.

Uma vez que o volume de um cilindro circular reto é dado por $V = \pi r^2 h$, sendo r o raio da base e h a altura, conclui-se que $r = 2cm$ e $h = 6cm$.

A base da pirâmide é um triângulo inscrito em um círculo de raio r = 2cm.
Sendo H a altura do triângulo e L o lado, tem-se $2 = \frac{2}{3}H$ e $a = \frac{1}{3}H = \frac{2}{2} = 1cm$.



Assim:

$$\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow \frac{L^2}{4} = 4 - 1$$

$$L^2 = 12 \Rightarrow L = 2\sqrt{3}\ cm$$

O triângulo inscrito tem lado $L = 2\sqrt{3}$ cm, altura H = 3cm e área igual a $3\sqrt{3}\ cm^2$.

Uma vez que a altura da pirâmide é a mesma do cilindro, h = 6cm, o volume da pirâmide é $V_1 = \frac{1}{3}.3\sqrt{3}.6$,

portanto, $V_1 = 6\sqrt{3}\ cm^3$.

A pirâmide menor obtida pela secção por um plano paralelo à base, situado a uma distância de 2cm do vértice, tem altura igual a 2cm e volume V_2.

Uma vez que a pirâmide maior e a menor são semelhantes, a razão entre seus volumes é o cubo da razão entre suas alturas, portanto, $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 27 \Rightarrow V_2 = \frac{V_1}{27} = \frac{6\sqrt{3}}{27} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Logo, o volume do tronco de pirâmide é $V_1 - V_2 = 6\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{52\sqrt{3}}{9}\ cm^3$.

Obs.: Outras abordagens poderão ser aceitas, desde que sejam pertinentes.

Salvador, 13 de dezembro de 2009

Antonia Elisa Caló de Oliveira Lopes
Diretora do SSOA/UFBA