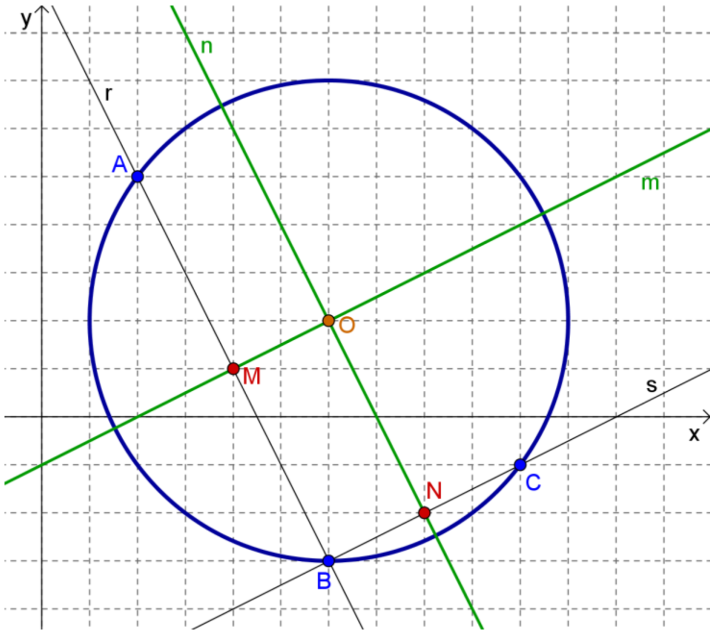
PISM 3 – QUESTÕES ABERTAS – GABARITO

1) Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos $A(2,5)$, $B(6,-3)$ e $C(10,-1)$.

Solução:



Sejam *r* a reta que passa pelos pontos *A* e *B* e *s* a reta que passa pelos pontos *B* e *C*.

Coeficientes angulares das retas r e s:

$$a_r = \frac{-3-5}{6-2} = \frac{-8}{4} = -2 \quad \text{e} \quad a_s = \frac{-1+3}{10-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Sejam *M* e *N* os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Então tem-se:

$$M = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (4,1) \text{ e}$$

$$N = \left(\frac{6+10}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) = (8,-2).$$

Sejam *m* e *n* as mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Como essas retas são perpendiculares às retas *r* e *s*, respectivamente, tem-se que:

Coeficiente angular das retas *m* e *n*: $a_m = -\frac{1}{a_r} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$ e $a_n = -\frac{1}{a_s} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$.

Equação da reta *m*: $y-1 = \frac{1}{2}(x-4)$ ou $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Equação da reta *n*: $y+2 = -2(x-8)$ ou $y = -2x+14$.

O centro O da circunferência se encontra na interseção das retas *m* e *n*. Resolvendo o sistema $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = -2x+14 \end{cases}$,

encontra-se $x = 6$ e $y = 2$, que são as coordenadas do centro da circunferência.

O raio *R* dessa circunferência é dado, por exemplo, como a medida do segmento $\overline{OA}$. Então

$$R = d(O,A) = \sqrt{(6-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Portanto, a equação da circunferência é $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 25$.

2) Considere o sistema

$$\begin{cases} (a+1)z = b \\ x + az = 0 \\ ay + z = 2 \\ x + ay + (a+1)z = 2 \end{cases}$$

sendo $a \neq -1$.

Classifique o sistema em função dos parâmetros *a* e *b*.

1ª Solução:

Note inicialmente que a 4ª equação pode ser obtida somando-se a 2ª e a 3ª equações do sistema. Portanto, pode-se desconsiderar a 4ª equação do sistema dado, pois esta é redundante, não agrega nova informação.

Como $a \neq -1$, da 1ª equação tem-se $z = \dfrac{b}{a+1}$. Substituindo esse valor de *z* na:

- 2ª equação, obtém-se: $x = -\dfrac{ab}{a+1}$;
- 3ª equação, obtém-se: $ay = 2 - \dfrac{b}{a+1}$, ou seja, $ay = \dfrac{2a+2-b}{a+1}$, donde $y = \dfrac{2a+2-b}{a(a+1)}$, para $a \neq 0$.

Portanto, o sistema tem solução única se $a \neq -1$ e $a \neq 0$.

Finalmente, se $a = 0$, o sistema se reduz a:

$$\begin{cases} z = b \\ x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

que só terá solução se $b = 2$ e, nesse caso terá infinitas soluções pois todo terno ordenado da forma $(0, y, 2)$ será uma solução do sistema, qualquer que seja *y*. Assim, se $a = 0$ e $b \neq 2$, o sistema não terá solução.

Assim, o sistema

a) admite solução única quando $a \neq -1$ e $a \neq 0$, qualquer que seja *b*.

b) admite infinitas soluções quando $a = 0$ e $b = 2$.

c) não admite solução quando $a = 0$ e $b \neq 2$.

2ª Solução:

Da 1ª equação tem-se: $z = \dfrac{b}{a+1}$, já que $a \neq -1$. Substituindo esse valor de *z* na 2ª e 3ª equações obtém-se, respectivamente, $x = -\dfrac{ab}{a+1}$ e $y = \dfrac{2a+2-b}{a(a+1)}$, isto para $a \neq 0$.

Verificando estes valores na 4ª equação tem-se:

$x + ay + (a+1)z = \left(-\dfrac{ab}{a+1}\right) + a\left(\dfrac{2a+2-b}{a(a+1)}\right) + (a+1)\left(\dfrac{b}{a+1}\right) = -\dfrac{ab}{a+1} + \dfrac{2a+2-b}{(a+1)} + b = \dfrac{2(a+1)}{a+1} = 2$, já que $a \neq -1$. Logo, para $a \neq -1$ e $a \neq 0$, o sistema tem solução única, que é dada por

$$S = \left\{\left(-\frac{ab}{a+1}, \frac{2a+2-b}{a(a+1)}, \frac{b}{a+1}\right)\right\}.$$

Finalmente, se $a = 0$, o sistema se reduz a:

$$\begin{cases} z = b \\ x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

que só terá solução se $b = 2$ e, nesse caso terá infinitas soluções pois todo terno ordenado da forma $(0, y, 2)$ será uma solução do sistema, qualquer que seja *y*. Assim, se $a = 0$ e $b \neq 2$, o sistema não terá solução.

3) Seja $p(x)$ um polinômio tal que $p(0)=1$ e $p(2)=p(-2)=9$. Determine o resto da divisão de $p(x)$ por $q(x)=x\left(x^2-4\right)$.

Solução:

Sabe-se que

$$p(x)=q(x)d(x)+r(x)=\left[x\left(x^2-4\right)\right]d(x)+r(x) \qquad (*)$$

onde $d(x)$ e $r(x)$ são respectivamente o quociente e o resto da divisão euclidiana de $p(x)$ por $q(x)$, ou seja, $gr\left[r(x)\right]<gr\left[q(x)\right]=3$. Daí resulta que $gr\left[r(x)\right]\leq 2$.

Logo $r(x)=ax^2+bx+c$, para certos *a, b* e *c* reais.

Como são conhecidos os valores de $p(0)$, $p(2)$ e de $p(-2)$, calcularemos seus valores a partir de (*):

$$p(0)=q(0)d(0)+r(0)=\left[0\left(0^2-4\right)\right]d(0)+r(0)=r(0)=c$$

$$p(2)=q(2)d(2)+r(2)=\left[2\left(2^2-4\right)\right]d(2)+r(2)=r(2)=4a+2b+c$$

$$p(-2)=q(-2)d(-2)+r(-2)=\left[(-2)\left((-2)^2-4\right)\right]d(-2)+r(-2)=r(-2)=4a-2b+c$$

Daí se o obtém o sistema:

$$\begin{cases} c=1 \\ 4a+2b+c=9 \\ 4a-2b+c=9 \end{cases}$$

Donde se obtém:

$$\begin{cases} 4a+2b=8 \\ 4a-2b=8 \end{cases}$$

Somando as duas equações tem-se $a=2$ e, consequentemente, $b=0$.

Logo, o resto da divisão do polinômio de $p(x)$ por $q(x)$ é o polinômio $r(x)=2x^2+1$.

4) Seja $p(x) = ax^2 - 2x - (3a+2)$ sendo $a \neq 0$.

a) Mostre que $p(x)$ tem duas raízes distintas.

Solução:

Tem-se que

$$\Delta = (-2)^2 - 4a\left[-(3a+2)\right] = 4 + 12a^2 + 8a = 4\left(3a^2 + 2a + 1\right).$$

Considerando agora o trinômio $q(a) = 3a^2 + 2a + 1$, tem-se que:

$$\Delta_1 = 2^2 - 4(3)(1) = -8 < 0.$$

Portanto, $q(a) > 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $\Delta > 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$, já que $\Delta = 4 \cdot q(a)$.

Assim, $p(x)$ tem duas raízes distintas, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}^*$.

b) Suponha que as raízes x_1 e x_2 de $p(x)$ satisfaçam $x_1 < 1 < x_2$. Mostre que $a \cdot p(1) < 0$.

Solução:

Há dois casos a serem analisados:

1º) $a > 0$. Neste caso a parábola tem concavidade voltada para cima e como 1 está entre as raízes x_1 e x_2 de $p(x)$, segue que $p(1) < 0$. Logo, $a \cdot p(1) < 0$.

2º) $a < 0$. Neste caso a parábola tem concavidade voltada para baixo e como 1 está entre as raízes x_1 e x_2 de $p(x)$, segue que $p(1) > 0$. Logo, $a \cdot p(1) < 0$.

Portanto, $a \cdot p(1) < 0$.

c) Calcule os valores de *a* para que as raízes x_1 e x_2 do polinômio $p(x)$ satisfaçam a relação $x_1 < 1 < x_2$.

Solução:

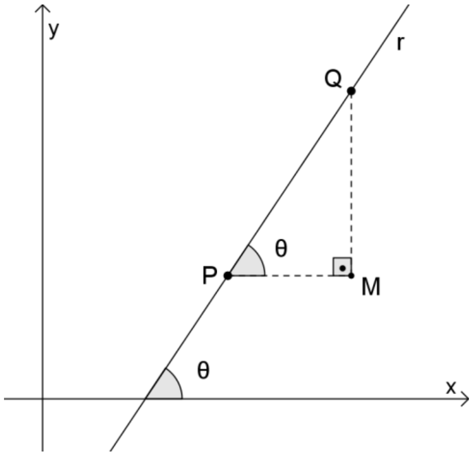
Se as raízes x_1 e x_2 de $p(x)$ satisfazem $x_1 < 1 < x_2$, então, do item (b) pode-se afirmar que $a \cdot p(1) < 0$.

Mas $p(1) = a - 2 - (3a+2) = -2a - 4$.

Assim, $a(-2a-4) = -2a^2 - 4a < 0$, donde $a^2 + 2a > 0$, ou seja, $a(a+2) > 0$.

Daí vem que $a < -2$ ou $a > 0$.

5) Dada uma reta *r* no plano, seu coeficiente angular m_r fornece sua inclinação em relação ao eixo das abscissas, e é definido pela tangente de θ, onde $0 \le \theta < \pi$ e $\theta \ne \frac{\pi}{2}$, sendo θ o ângulo que a reta *r* forma com o semi-eixo positivo das abscissas. O coeficiente angular pode ser facilmente calculado se conhecemos dois pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ pertencentes à reta *r*.



De fato $m_r = tg\theta = \frac{MQ}{MP} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$.

Dados três ou mais pontos no plano, dizemos que eles são colineares se pertencem a uma mesma reta.

Usando a noção de coeficiente angular, verifique se os pontos $A(-1,2)$, $B(1,3)$ e $C(6,6)$ são colineares.

Solução:

Os pontos *A*, *B* e *C* serão colineares se pertencerem à uma mesma reta.

Seja m_s o coeficiente angular da reta *s* definida pelos pontos *A* e *B*. Então:

$$m_s = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

Seja m_t o coeficiente angular da reta *t* definida pelos pontos *B* e *C*. Então:

$$m_t = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{6-3}{6-1} = \frac{3}{5}.$$

Comparando os valores encontrados para m_s e m_t concluímos que a reta que passa pelos pontos *A* e *B* é distinta daquela que passa pelos pontos *B* e *C*.

Portanto os pontos *A*, *B* e *C* não são colineares. Veja a representação abaixo.