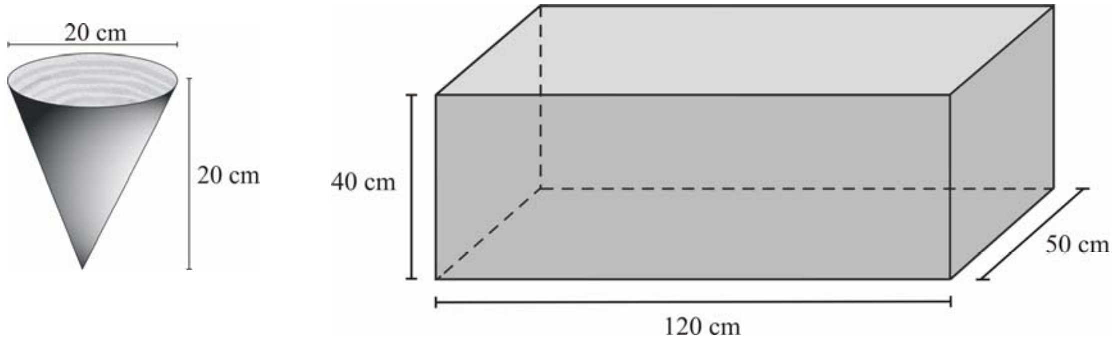
REFERÊNCIAS PARA CORREÇÃO

PROVA DE MATEMÁTICA

1) Fernando utiliza um recipiente, em forma de um cone circular reto, para encher com água um aquário em forma de um paralelepípedo retângulo. As dimensões do cone são: 20 cm de diâmetro de base e 20 cm de altura e as do aquário são: 120 cm, 50 cm e 40 cm, conforme ilustração abaixo.



Cada vez que Fernando enche o recipiente na torneira do jardim, ele derrama 10% de seu conteúdo no caminho e despeja o restante no aquário. Estando o aquário inicialmente vazio, qual é o número mínimo de vezes que Fernando deverá encher o recipiente na torneira para que a água despejada no aquário atinja $\frac{1}{5}$ de sua capacidade?

$$V_{aq} = \text{volume do aquário} \Rightarrow V_{aq} = 40.50.120 = 240.000$$

$$V_a = \frac{1}{5} \text{ do volume do aquário} \Rightarrow V_a = \frac{1}{5}240.000 = 48.000$$

$$V_c = \text{volume do cone} \Rightarrow V_c = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi.10^2.20}{3} = \frac{2000\pi}{3}$$

$$V_t = \text{volume de água transportada no cone}$$

$$\Rightarrow V_t = \frac{9}{10}V_c = \frac{9}{10}\frac{2000\pi}{3} = 600\pi$$

$$N = \text{número de viagens} \Rightarrow N = \frac{48.000}{600\pi} = \frac{80}{\pi} \cong 25,47 \text{ (se } \pi \cong 3,14)$$

Conclusão: desta forma serão necessárias 26 viagens.

Justificativa da conclusão: é necessário mostrar que a aproximação para π não influencia o resultado final, isto é, que as aproximações inferior e superior para π mantêm o número de viagens superior a 25, mas abaixo de 26. Assim, de $3,1 < \pi < 3,15$, segue-se que o número de viagens, calculados pra os valores 3,1 e 3,15 são, respectivamente,

$$\frac{80}{3,1} = 25,8 \text{ e } \frac{80}{3,15} = 25,4.$$

Portanto, o número de viagens usando a aproximação "superior" para π fica acima de 25 e o número de viagens usando a aproximação "inferior" fica abaixo de 26.

(valor: 5,0 pontos)

2) Flávio tem, em sua calculadora, uma tecla com o símbolo . Se o visor da calculadora mostra um número *x*, ao apertar a tecla , aparece, no visor, o valor de $\frac{-8x}{(x-1)(x-7)}$, se este existir; caso contrário, aparece a mensagem ERRO.

a) Se Flávio inserir o número 2 no visor e apertar a tecla , qual número aparecerá no visor?

Fazendo $x=2$ ***na expressão dada, obtemos:***

$$\frac{(-8).2}{(2-1)(2-7)}=\frac{-16}{-5}=\frac{16}{5}=3,2$$

(valor: 0,5 pontos)

b) Para quais valores que, uma vez inseridos no visor, ao se apertar a tecla , surgirá a mensagem ERRO?

Os valores que geram a mensagem "erro" são aqueles para os quais $(x-1)(x-7)=0$. ***Assim, temos que*** $x=1$ ou $x=7$.

(valor: 1,0 ponto)

c) Flávio inseriu um número x no visor e, ao apertar a tecla , apareceu o próprio número inserido. Nessas condições, determine todos os possíveis valores que Flávio poderia ter inserido no visor.

$$\frac{-8x}{(x-1)(x-7)}=x$$

$$x^3-8x^2+7x=-8x \Rightarrow x^3-8x^2+15x=0$$

$$x(x^2-8x+15)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x^2-8x+15=0$$

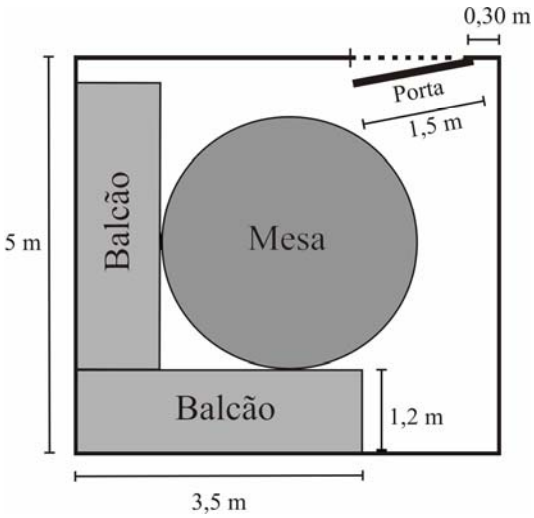
$$x=0,\ \ x=3 \text{ ou } \ x=5.$$

(valor: 3,5 pontos)

REFERÊNCIAS PARA CORREÇÃO

PROVA DE MATEMÁTICA

3) Num cômodo quadrado de lado 5 m, há uma porta de 1,5 m de largura, posicionada a 0,30 m de um dos cantos. Nesse cômodo, foram colocados dois balcões retangulares idênticos, de 3,5 m de comprimento e 1,2 m de largura, encostados nas paredes, e uma mesa circular de 3 m de diâmetro, encostada nesses balcões, conforme indica a planta-baixa, a seguir:



a) Qual é a medida, em m², da área da planta-baixa não ocupada pelos móveis?

Sejam S_C, S_B, S_M as áreas do cômodo, do balcão, da mesa, respectivamente, e seja S a área procurada. Então,

$S_C = 5.5 = 25$

$S_B = 3,5.1,2 = 4,2$

$S_M = \pi(1,5)^2 = 2,25\pi$

Portanto,

$S = S_C - 2S_B - S_M \Rightarrow S = 25 - 8,4 - 2,25\pi = 16,6 - 2,25\pi$

(valor: 3,0 pontos)

b) É possível abrir totalmente a porta desse cômodo com os móveis nas posições indicadas?

Sejam AC o segmento de reta vertical ligando o centro da mesa à parede superior do cômodo e AB o segmento de reta ligando o centro da mesa ao ponto onde a porta está presa na parede. Então,

$AC = 5 - 1,5 - 1,2 = 2,3$

$CB = 5 - 1,5 - 1,2 - 0,3 = 2$

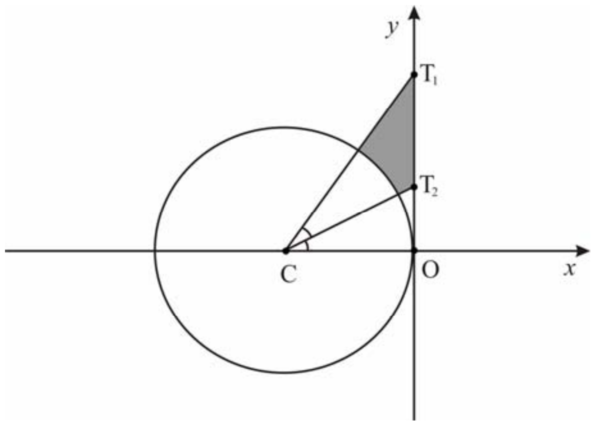
$(AB)^2 = (2,3)^2 + 2^2 = 5,29 + 4 = 9,29 \Rightarrow AB = \sqrt{9,29}$

$AB > 3 = 1,5 + 1,5 = r + p,$

onde r é o raio da mesa e p é largura da porta. Portanto, é possível abrir a porta.

(valor: 2,0 pontos)

4) Na figura abaixo, temos um sistema de eixos cartesianos com origem em O. Nele, encontra-se representada uma circunferência tangente ao eixo das ordenadas e com centro $C(-1,0)$. Sejam T_1 e T_2 pontos sobre o semi-eixo positivo das ordenadas, tais que $T_2\widehat{C}T_1 = O\widehat{C}T_2 = 30^o$.



a) Determine o comprimento do segmento $\overline{OT_1}$.

$$\overline{OT_1} = \frac{\overline{OT_1}}{1} = tg\,60^o = \sqrt{3}$$

(valor: 1,0 ponto)

b) Calcule o valor da área sombreada.

$$A(\Delta_{OCT_1}) = \frac{1.\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Bigg| \quad A(\Delta_{OCT_2}) = \frac{1.\frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \Bigg| \quad A(S_C) = \frac{\pi.1^2}{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$A_R = A(\Delta_{OCT_1}) - A(\Delta_{OCT_2}) - A(S_C) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{4\sqrt{3}-\pi}{12}$$

(valor: 2,0 pontos)

c) Encontre as equações das retas que passam pelo ponto T_1 e são tangentes à circunferência dada.

Justificativa de que a reta tangente com o eixo x forma um ângulo de 30º.

$$y = y_0 + (tg\,30^o)(x-0) \text{ e } x = 0$$

$$y = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ e } x = 0$$

(valor: 2,0 pontos)

5) Uma circunferência de centro no ponto $C(5,4)$ é tangente à reta de equação $x = 5 + 2\sqrt{2}$.

a) Essa circunferência intercepta o eixo das abscissas?

$$r = \left|5 - (5 + 2\sqrt{2})\right| = 2\sqrt{2}$$

Comparando o raio com a ordenada do centro da circunferência: $2\sqrt{2} \cong 2{,}82 < 4$

(valor: 1,5 pontos)

b) Qual é a posição relativa do ponto $P(3,2)$ em relação a essa circunferência?

Equação da circunferência: $(x-5)^2 + (y-4)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$

Como $P(3,2)$ ***satisfaz a equação da circunferência, o mesmo está sobre a circunferência.***

(valor: 1,0 ponto)

c) Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $P(3,2)$ e é tangente a essa circunferência.

$$m_r = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}, \text{ onde } (y_0, x_0) = (3,2) \text{ e } (a,b) = (5,4).$$

$$m_r = \frac{3-5}{2-4} = 1$$

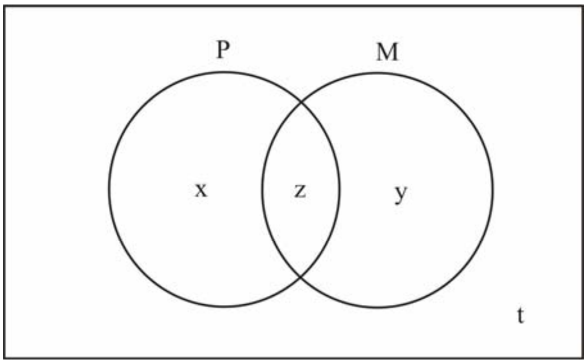
$$m_s = \frac{-1}{m_r} = -1$$

$$y - 2 = -1(x-3) \Rightarrow y = 5 - x$$

(valor: 2,5 pontos)

6) Numa escola, verificou-se que 130 alunos não lêem o jornal P, 146 não lêem o jornal M e 8 lêem os jornais P e M. Sabe-se que 60 alunos lêem, pelo menos, um dos dois jornais.

a) Qual é o número de alunos na escola?



x* = lêem *P* e não lêem *M

y* = não lêem *P* e lêem *M
z* = lêem *P* e lêem *M
t* = não lêem *P* e não lêem *M
x+y+z+t=?

$$\begin{cases} t+y=130 \\ x+t=146 \\ x+z+y=60 \\ z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+y=130 \\ x+t=146 \\ x+y=52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=16 \\ x+y=52 \end{cases} \Rightarrow x=34,\ y=18,\ z=8 \text{ e } t=112$$

$$x+y+z+t=172$$

(valor: 2,5 pontos)

b) Um estudante dessa escola foi selecionado, aleatoriamente, dentre os estudantes que lêem, pelo menos, um dos dois jornais. Qual é a probabilidade de ele ser leitor de ambos os jornais?

$$P(P\cap M)=\frac{8}{60}=\frac{2}{15}$$

(valor: 1,0 ponto)

c) Se um estudante dessa escola é selecionado ao acaso, qual é a probabilidade de esse aluno ser leitor do jornal P, sabendo-se que ele é leitor de, pelo menos, um dos dois jornais?

$$P(P\,|\,(P\cup M)=\frac{P(P\cap(P\cup M))}{P(P\cup M)}=\frac{P(P)}{P(P\cup M)}=\frac{42}{60}=\frac{7}{10}$$

(valor: 1,5 pontos)