Gabarito da Prova de Matemática
2ª fase do Vestibular 2009

Questão 01:

(a) Enuncie o Teorema de Pitágoras

<u>Solução:</u> Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

(b) Justifique por que a argumentação abaixo não pode ser considerada uma demonstração para o Teorema de Pitágoras.

Seja ABC um triângulo retângulo em B.

Construa a altura $\overline{BH}$, relativa à hipotenusa.

Dos triângulos AHB e CHB tem-se:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$
$$BC^2 = BH^2 + HC^2$$

A partir dessas igualdades obtém-se:

$$AB^2 + BC^2 = \left(AH^2 + HB^2\right) + \left(BH^2 + HC^2\right)$$
$$AB^2 + BC^2 = AH^2 + 2HB^2 + HC^2$$

Como $HB^2 = AH \cdot HC$ tem-se:

$$AB^2 + BC^2 = \left(AH + HC\right)^2$$
$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Solução: Quando se afirma que:

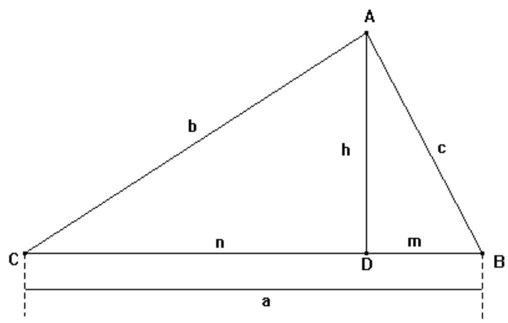
Dos triângulos AHB e CHB tem-se:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$
$$BC^2 = BH^2 + HC^2$$

está se utilizando na argumentação o próprio teorema que se deseja demonstrar.

(c) Demonstre o Teorema de Pitágoras.

Solução: Seja ABC um triângulo retângulo em A e $\overline{AD}$ a altura relativa à hipotenusa.



Como ΔADB e ΔABC são ambos retângulos e possuem o ângulo $\hat{B}$ em comum, tem-se

$$\Delta ADB \approx \Delta ABC \Rightarrow \frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow am = c^2$$

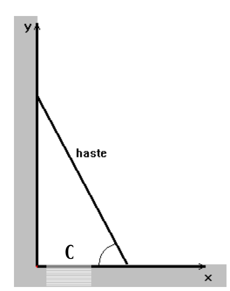
Como ΔCDA e ΔABC são ambos retângulos e possuem o ângulo $\hat{C}$ em comum, tem-se

$$\Delta CDA \approx \Delta ABC \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow an = b^2$$

Portanto $a(m+n) = c^2 + b^2$. Como $m+n=a$, então $a^2 = b^2 + c^2$, como queríamos demonstrar.

Questão 02:

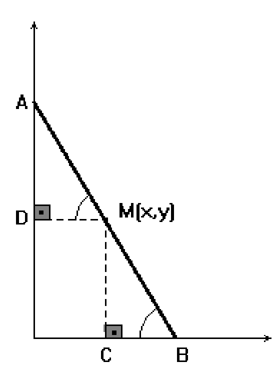
Uma haste, de 4 m de comprimento, está deslizando numa parede, apoiada ao solo. Veja ilustração abaixo.



a) Encontre as coordenadas (x, y) do ponto médio da barra, em função do ângulo α.

Solução: Inicialmente observe que os ângulos $A\hat{M}D$ e $M\hat{B}C$ são correspondentes, logo têm a mesma medida. E ainda, sendo M o ponto médio da haste, $AM = MB = 2$ m.

Como $DM = x$ tem-se, do triângulo ADM, que:



$$\cos\alpha = \frac{DM}{AM} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\cos\alpha .$$

Como $MC = y$ tem-se, do triângulo MCB, que:

$$\text{sen}\alpha = \frac{MC}{MB} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2\text{sen}\alpha .$$

Logo as coordenadas do ponto M são $M(2\cos\alpha, 2\text{sen}\alpha)$.

b) Determine o valor de α para o qual a diferença $y - x$, entre as coordenadas do ponto médio, seja igual a $\sqrt{2}$.

Solução:

$$y - x = 2sen\alpha - 2\cos\alpha \Rightarrow y - x = 2(sen\alpha - \cos\alpha)$$

$$y - x = \sqrt{2} \Rightarrow 2(sen\alpha - \cos\alpha) = \sqrt{2}$$

$$sen\alpha - \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (sen\alpha - \cos\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$sen^2\alpha - 2sen\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{2}{4}$$

Como $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, tem-se:

$$1 - 2sen\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow -sen2\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow sen2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\text{k}\pi \text{ ou } 2\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\text{k}\pi,\ k \in Z$$

$$\alpha = \frac{\pi}{12} + \text{k}\pi \text{ ou } \alpha = \frac{5\pi}{12} + \text{k}\pi,\ k \in Z$$

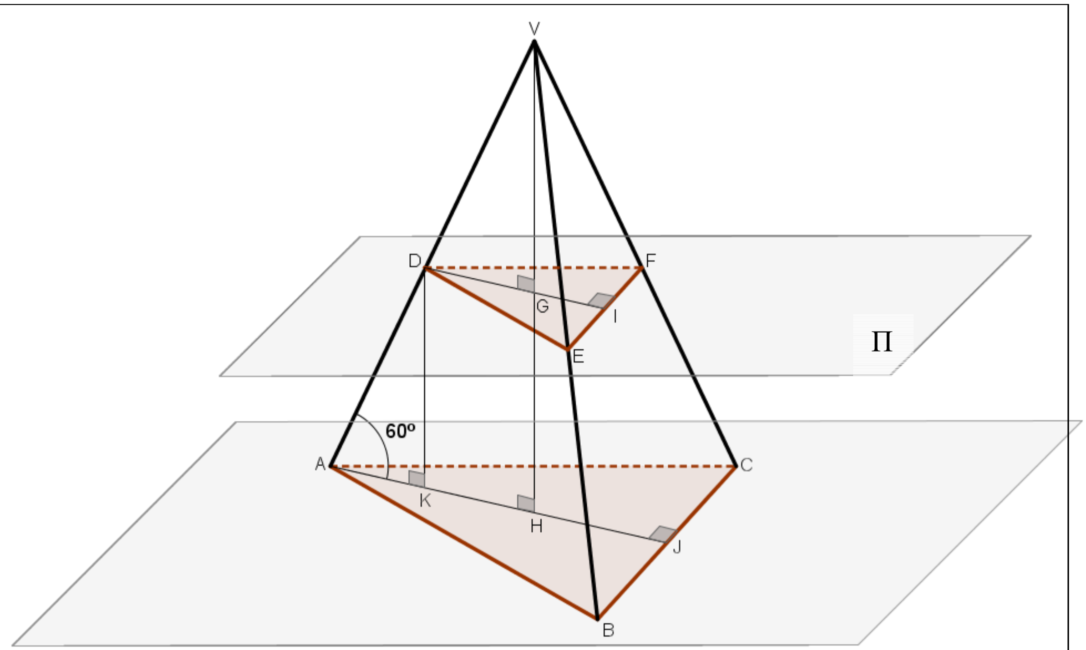
Pelo contexto, α deve ser um ângulo agudo, portanto deve-se ter $\alpha = \frac{\pi}{12}$ rad ou $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ rad. Para que $y - x = \sqrt{2} > 0$ devemos ter $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ rad, já que se $\alpha = \frac{\pi}{12}$ rad, teremos $sen\frac{\pi}{12} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{11\pi}{12} < \cos\frac{\pi}{12}$ e, nesse caso, $y - x < 0$.

α

Questão 03:

Ao seccionarmos uma pirâmide triangular regular *P*, de aresta da base medindo 4 m,
por um plano π paralelo à sua base, foram obtidos dois sólidos: uma pirâmide *T*, cuja aresta da base mede 3 m, e um segundo sólido. A inclinação da aresta lateral de *P* em relação à sua base é igual a 60°. Determine a distância entre o plano π e o plano da base de *P*.

Solução:



Inicialmente observe que, como ΔABC é eqüilátero, seu lado mede 4m e $\overline{AJ}$ é sua altura, segue que: $AJ = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ m.

Analogamente (ou por semelhança entre ΔABC e ΔDEF) considerando o ΔDEF conclui-se que $DI = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ m.

Como a pirâmide é regular, sendo $\overline{VH}$ sua altura, temos que o ponto H é também o baricentro de ΔABC assim como, o ponto G, interseção de $\overline{VH}$ com o plano π, é por sua vez o baricentro de ΔDEF. Então

$$AH = \frac{2}{3}AJ = \frac{2}{3}2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{m e } DG = \frac{2}{3}DI = \frac{2}{3}\frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\text{ m.}$$

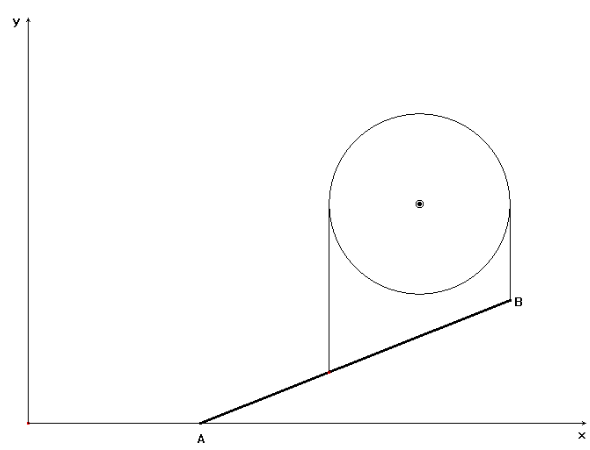
Traçando $\overline{DK}$ paralelo a $\overline{VH}$ com $K \in \overline{AJ}$ tem-se o ΔAKD no qual

$$AK = AH - KH = AH - DG = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{ m.}$$

Ainda nesse triângulo temos:

$$tg60^{\circ} = \frac{DK}{AK} = \frac{DK}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{DK}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{3} = DK \Rightarrow DK = 1\text{m.}$$

Questão 04:
Uma haste está sendo sustentada por um fio de 5,93 cm de comprimento. Esse fio encontra-se tensionado e apoiado em uma roldana em forma de circunferência cuja



equação é $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 33 = 0$. As partes do fio que não se encontram em
contato com a roldana são paralelas ao eixo y. A ordenada da extremidade B da haste é 2,14 cm. Veja a ilustração abaixo.

a) Determine as coordenadas do centro e o raio da roldana.

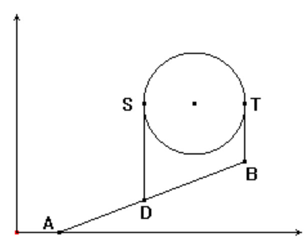
<u>Solução:</u> Como a circunferência da roldana tem equação $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 33 = 0$, podemos concluir que:

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 33 = 0$$
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 + 33 = 0 + 34$$
$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 1$$

Assim, o centro dessa circunferência é dado pelo ponto $C(5,3)$ e seu raio $r = 1$ cm.

b) A extremidade *A* da haste encontra-se sobre o eixo *x*. Encontre a abscissa do ponto *A*. (Use a aproximação 3,14 para π)

<u>Solução:</u> Como o fio tem 5,93 cm de comprimento, temos que:



$TB + comprimento(arcoST) + SD = (3 - 2{,}14) + 3{,}14 + SD = 5{,}93$, donde $SD = 1{,}93$ e, portanto, $y_D = 3 - 1{,}93 = 1{,}07$.

Como $x_D = 5 - 1 = 4$ e $x_B = 5 + 1 = 6$ tem-se $B(6;2{,}14)$ e $D(4;1{,}07)$.

Equacionando a reta que passa por D e B:

$$y - 1{,}07 = \frac{2{,}14 - 1{,}07}{6 - 4}(x - 4)$$
$$y - 1{,}07 = \frac{1{,}07}{2}(x - 4)$$

A abscissa do ponto A é obtida fazendo $y = 0$ nessa última equação:

$$-1{,}07 = \frac{1{,}07}{2}(x - 4)$$
$$\frac{-1{,}07 \times 2}{1{,}07} = x - 4$$
$$x = 4 - 2 \Rightarrow x = 2$$

Questão 05: Considere os polinômios $p(x) = 2x^5 - 7x^4 + 15x^3 + ax^2 + bx - 8$ e $q(x) = x^2 + 4$ na variável x, com coeficientes inteiros. Sabendo que eles têm pelo menos uma raiz em comum.

a) Determine os valores de *a* e *b*.

Solução: As raízes de $q(x) = x^2 + 4$ são obtidas fazendo

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow x = \pm 2i.$$

Como $p(x)$ e $q(x)$ têm pelo menos uma raiz em comum e como as duas raízes de $q(x)$ são números complexos, isto implica que ambas as raízes de $q(x)$ devem também ser raízes de $p(x)$, já que se um número complexo é raiz de um polinômio, seu conjugado também o é. Já que todas as raízes $q(x)$ são também raízes de $p(x)$, o polinômio $q(x)$ deve dividir o polinômio $p(x)$, ou seja, o resto da divisão do polinômio $p(x)$ por $q(x)$ deve ser o polinômio identicamente nulo. Efetuando essa divisão encontra-se por quociente o polinômio $p_1(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x + (a + 28)$ e por resto o polinômio $r(x) = (b - 28)x - (4a + 120)$. Com o resto deve ser o polinômio identicamente nulo, devemos ter:

$$\begin{cases} b - 28 = 0 \Rightarrow b = 28 \\ 4a + 120 = 0 \Rightarrow a = -30 \end{cases}$$

b) Encontre todas as raízes de $p(x)$.

Solução: Como $a = -30$ e $b = 28$, temos que $p(x) = 2x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 30x^2 + 28x - 8$.

Dividindo o polinômio $p(x)$ pelo polinômio $q(x)$ o quociente será o polinômio $p_1(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$. Como a soma dos coeficientes desse polinômio é zero, conclui-se que $p_1(1) = 0$, ou seja, o polinômio $p_1(x)$ admite o nº real 1 como uma de suas raízes. Dividindo então $p_1(x)$ por $q_1(x) = x - 1$ o quociente será o polinômio $p_2(x) = 2x^2 - 5x + 2$ e o resto será o polinômio identicamente nulo . As raízes do polinômio $p_2(x)$ podem ser encontradas resolvendo a equação quadrática $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, as raízes do polinômio $p(x)$ são: $\frac{1}{2}$, 2, 1, $2i$, $-2i$.

Questão 06: Em um restaurante, um quilograma de comida custa R$ 25,00. Como política de incentivo à fidelidade, em cada refeição, oferece um cupom para cada R$ 5,00 de comida consumida. Doze cupons acumulados valem um refrigerante que custa R$ 3,00.

a) Pedro consumiu diariamente 550 g nesse restaurante durante 4 dias. Determine o número de cupons que Pedro acumulou ao final desses 4 dias.

Solução: Por regra de três tem-se:

Consumo em gramas	Valor em reais
1000	25
550	x

$$\Rightarrow \frac{1000}{550} = \frac{25}{x} \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 550}{1000} = 13{,}75$$

Logo, tendo consumido diariamente 550 g, Pedro pagou R$ 13,75, recebendo portanto 2 cupons por dia $(13{,}75 \div 5 = 2{,}75)$. Nesses quatro dias Pedro recebeu $4 \times 2 = 8$ cupons.

b) Determine o desconto, em porcentagem, que Pedro obteria caso pudesse converter os cupons já acumulados em dinheiro ao consumir 500 g em uma nova refeição.

Solução: Novamente por regra de três tem-se:

Nº de cupons	Valor em reais
12	3
8	x

$$\Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 8}{12} = 2.$$

Logo os 8 cupons acumulados por Pedro corresponde a R$ 2,00.
Ao consumir 500 g em uma refeição, Pedro deverá pagar R$ 12,50. Ao converter seus cupons em desconto, terá R$ 2,00 de desconto. Em termos percentuais:

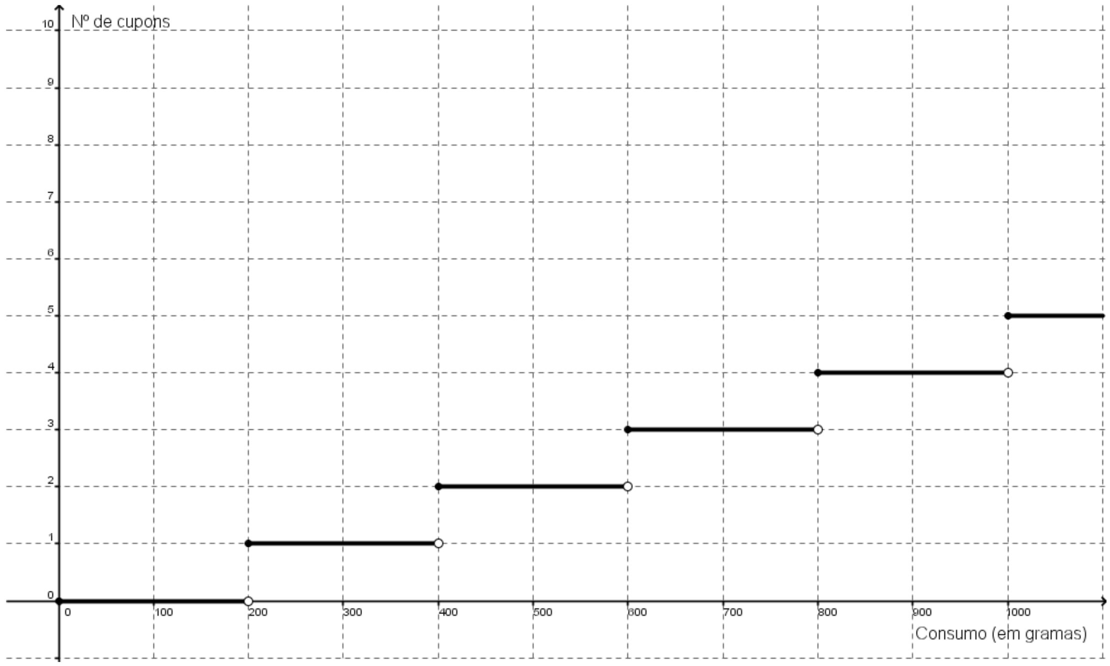
Valores em reais	Percentagem
12,50	100
2,00	x

$$\Rightarrow \frac{12{,}5}{2} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 100}{12{,}5} = 16.$$

O desconto seria de 16%.

c) Esboce o gráfico que representa o número de cupons ganhos em função do consumo (em gramas) em uma refeição.

Solução:



Nº de cupons
Consumo (em gramas)