UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

COMISSÃO PERMANENTE DE SELEÇÃO – COPESE
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO – PROGRAD
CONCURSO VESTIBULAR 2010

Prova de Matemática

Vestibular 2ª Fase
Resolução das Questões Discursivas

São apresentadas abaixo possíveis soluções para as questões propostas. Nessas resoluções buscou-se justificar as passagens visando uma melhor compreensão do leitor.

1) O polinômio $p(x) = 2x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ foi dividido por um polinômio $d(x)$ e obteve-se, por quociente, o polinômio $q(x) = x^2 + 3$ e, por resto, um polinômio $r(x)$. Sabe-se que $r(-1) = 0$ e $r(1) = 2$.

a) Determine os graus dos polinômios $d(x)$ e $r(x)$.

Solução:

Designaremos por $gr(f)$ o grau de um polinômio $f(x)$. Assim, $gr(p) = 4$ e $gr(q) = 2$.

Pelo algoritmo da divisão tem-se que $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$, com $gr(r) < gr(d)$ ou $r(x) = 0$.

Daí, segue que:

$$gr(p) = gr(d) \cdot gr(q) \Rightarrow 4 = gr(d) \cdot 2 \Rightarrow gr(d) = 2$$

Como $r(1) = 2$, fica descartada a possibilidade de se ter $r(x) = 0$ e, portanto tem-se, obrigatoriamente, $gr(r) < gr(d) = 2$.

Agora, como $r(1) \neq r(-1)$, o polinômio $r(x)$ não é constante e, portanto,

$$gr(r) = 1.$$

b) Determine os polinômios $d(x)$ e $r(x)$.

Solução:

Sabemos, por (a), que $r(x) = ax + b$. Então:

$$
\begin{aligned}
r(-1) &= a(-1) + b = 0 \Rightarrow -a + b = 0 \quad (1) \\
r(1) &= a(1) + b = 2 \Rightarrow a + b = 2 \quad (2)
\end{aligned}
$$

Somando membro a membro as equações (1) e (2), obtemos $b = 1$ e, consequentemente, $a = 1$.

Com isso tem-se $r(x) = x + 1$.

Agora, como $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$, para se obter o polinômio $d(x)$, basta dividir o polinômio $p(x) - r(x)$ por $q(x)$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^4 & +x^3 & +6x^2 & +3x & x^2+3 \\
\cline{5-5}
-2x^4 & & -6x^2 & & 2x^2+x \\
\cline{1-4}
& x^3 & & +3x & \\
& -x^3 & & -3x & \\
\cline{2-4}
& & 0 & &
\end{array}
$$

Portanto, $d(x) = 2x^2 + x$.

2) Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é ponto fixo de uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se $f(x_0)=x_0$.

a) Verifique se a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x^2-4x+6$ possui ponto fixo e, em caso afirmativo, determine seu(s) ponto(s) fixo(s).

Solução:

Seja x_0 um ponto fixo da função f dada. Então

$$f(x_0)=x_0^2-4x_0+6=x_0 \Rightarrow x_0^2-5x_0+6=0.$$

O conjunto solução da última equação é $\{2,3\}$.

Portanto a função f dada possui dois pontos fixos: 2 e 3.

b) Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função da forma $g(x)=ax+b$. Determine a e b para que g admita dois pontos fixos x_1 e x_2 distintos.

Solução:

Sejam x_1 e x_2 pontos fixos distintos da função g. Então

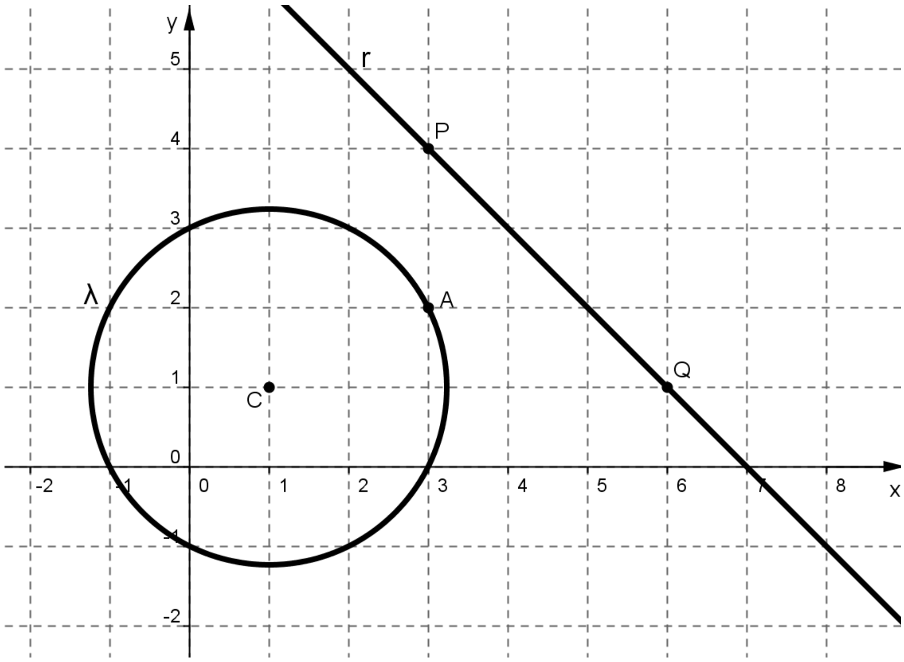
$$g(x_1)=ax_1+b=x_1 \Rightarrow (a-1)x_1+b=0 \quad (1)$$
$$g(x_2)=ax_2+b=x_2 \Rightarrow (a-1)x_2+b=0 \quad (2)$$

Fazendo (2) – (1) obtém-se: $(a-1)(x_2-x_1)=0$.

Como $x_1 \neq x_2$ segue da última igualdade que $a=1$.

Substituindo o valor de a, encontrado acima, em (1) ou (2) encontra-se $b=0$.

3) Considere a reta *r* determinada pelos pontos P e Q e a circunferência λ, de centro C, que passa pelo ponto A, conforme representados no plano cartesiano abaixo.



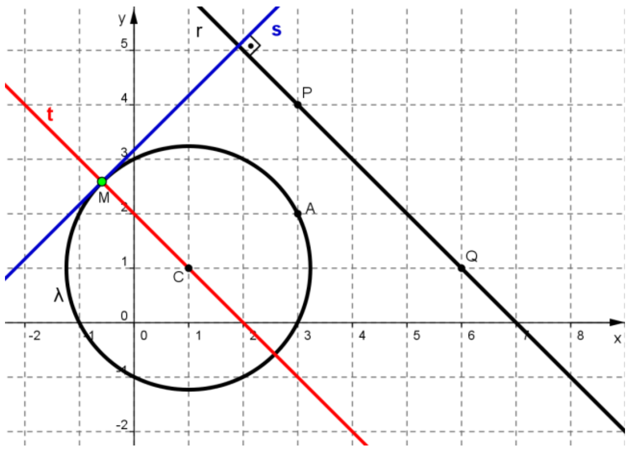
Determine a equação da reta *s*, perpendicular à reta *r*, tangente à circunferência λ e que contém pontos do 2º quadrante.

Solução:

Inicialmente calcula-se o coeficiente angular da reta r: $m_r = \dfrac{1-4}{6-3} = -\dfrac{3}{3} = -1.$

Como s é perpendicular a r, tem-se que, o coeficiente angular da reta s é:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-1} = 1.$$



Seja t a reta que passa por C e pelo ponto de tangencia M entre a reta s e a circunferência λ. Então t é paralela à reta r, $m_t = -1$ e, consequentemente, a equação de t é dada por:

$$t : y - 1 = -1(x - 1)$$
$$t : y = 2 - x$$

A equação da circunferência λ é dada por:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = R^2 \text{ onde } R = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5} \text{ é o raio de } \lambda.$$

Portanto, a equação de λ é dada por: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$

Como $M = \lambda \cap t$, a abscissa do ponto M pode ser encontrada substituindo-se $y = 2 - x$ na equação de λ. Obtém-se então:

$$(x-1)^2 + (2-x-1)^2 = 5 \Rightarrow 2(x-1)^2 = 5 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x-1 = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Como M é um ponto do 2º quadrante, sua abscissa é negativa, donde: $x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$.

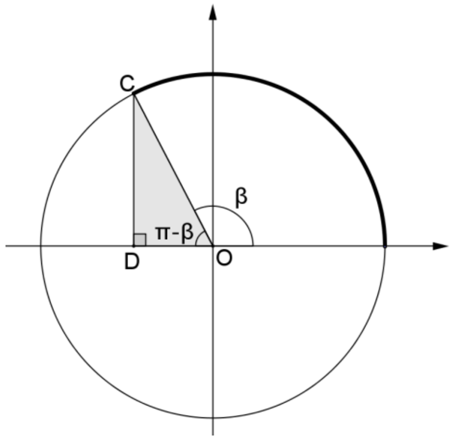
Daí, $y = 2 - \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \Rightarrow y = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$ é a ordenada de M.

Portanto, a equação de s será dada por:

$$s : y - \left(1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right) = 1\left[x - \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)\right]$$

$$s : y = x + \sqrt{10}$$

4) Nessa questão trataremos do processo de redução ao 1º quadrante das funções trigonométricas de um arco $\beta \in [0,2\pi]$. Se um arco β tem extremidade C no 2º quadrante, podemos obter um arco α, com extremidade no 1º quadrante, tal que $\text{sen}\beta = \text{sen}\alpha$ e $\cos\beta = -\cos\alpha$. Para isso, consideremos o triângulo OCD, retângulo em D, representado no círculo trigonométrico abaixo. Note que, nesse triângulo, $OC = 1$ e o ângulo agudo $C\hat{O}D = \pi - \beta$. Tomando $\alpha = \pi - \beta$ e utilizando as razões trigonométricas em um triângulo retângulo obtemos:



$\text{sen}\alpha = \text{sen}(\pi - \beta) = \dfrac{CD}{OC} = \dfrac{CD}{1} = CD$ e

$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta) = \dfrac{OD}{OC} = \dfrac{OD}{1} = OD$.

Por outro lado, $\text{sen}\beta = CD$ e $\cos\beta = -OD$.

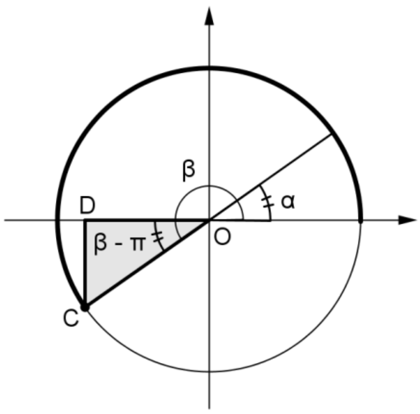
Portanto, $\text{sen}\beta = \text{sen}\alpha$ e $\cos\beta = -\cos\alpha$.

Considere um arco β com extremidade no 3º quadrante como ilustrado no círculo trigonométrico abaixo. Procedendo como acima, escolha adequadamente um arco α, com extremidade no 1º quadrante, e obtenha $\text{sen}\beta$ e $\cos\beta$ em função de $\text{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$, respectivamente.

Solução:

Considere o triângulo OCD, retângulo em D, na figura ao lado. Note que, nesse triângulo, $OC = 1$ e o ângulo agudo $C\hat{O}D = \beta - \pi$. Escolhendo $\alpha = \beta - \pi$, do triângulo OCD tem-se que:

$$\text{sen }\alpha = \text{sen}(\beta - \pi) = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{1} = CD \Rightarrow CD = \text{sen }\alpha$$



e $\cos\alpha = \cos(\beta - \pi) = \dfrac{OD}{OC} = \dfrac{OD}{1} = OD \Rightarrow OD = \cos\alpha$.

Por outro lado, $\text{sen}\beta = -CD$ e $\cos\beta = -OD$. Portanto, $\text{sen}\beta = -\text{sen}\alpha$ e $\cos\beta = -\cos\alpha$.

5) Sejam a e b números reais positivos que satisfazem simultaneamente as duas equações abaixo:

$$2\log_2 a + 4\log_2 b = 5$$

$$\log_4 a - \log_4 b = -3$$

Calcule o valor de a^3b^3 e expresse o resultado na forma de uma fração irredutível.

Solução:

$$2\log_2 a + 4\log_2 b = 5 \Rightarrow \log_2 a^2 + \log_2 b^4 = 5 \Rightarrow \log_2 a^2b^4 = 5 \Rightarrow a^2b^4 = 2^5 \quad (1)$$

$$\log_4 a - \log_4 b = -3 \Rightarrow \log_4 \frac{a}{b} = -3 \Rightarrow \frac{a}{b} = 4^{-3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2^6} \quad (2)$$

Multiplicando, membro a membro, as equações (1) e (2) obtém-se:

$$\left(a^2b^4\right) \times \left(\frac{a}{b}\right) = 2^5 \times \frac{1}{2^6}.$$

Portanto, $a^3b^3 = \dfrac{1}{2}$.