RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 1

a)
Se 6,8 milhões de toneladas correspondem a 18% do total transportado, então 100% correspondem a 6,8/0,18 ≈ 37,8 milhões de toneladas.
No primeiro semestre de 2007, foram transportadas por dutos 37,8 – 6,8 – 29,1 = 1,9 milhão de toneladas.

Resposta: No primeiro semestre de 2007, a carga transportada ao porto de Santos foi de aproximadamente 37,8 milhões de toneladas, das quais 1,9 milhão foram transportadas por dutos.

a')
Se 29,1 milhões de toneladas correspondem a 77% do total transportado, então 100% correspondem a 29,1/0,77 ≈ 37,8 milhões de toneladas.
No primeiro semestre de 2007, o transporte dutoviário teve uma participação de 100 – 18 – 77 = 5% do total transportado ao porto. Assim, foram transportadas 37,8 x 0,05 ≈ 1,9 milhão de toneladas por dutos.

Resposta: No primeiro semestre de 2007, a carga transportada ao porto de Santos foi de aproximadamente 37,8 milhões de toneladas, das quais 1,9 milhão foram transportadas por dutos.

b)
No primeiro semestre de 2008, foram transportadas 29,1 – 2,7 = 26,4 milhões de toneladas de carga. Se 8,8 milhões de toneladas correspondem a 24% do total transportado, então 26,4 milhões de toneladas correspondem a 26,4 x 24 / 8,8 = 3 x 24 = 72% da carga total.

Resposta: No primeiro semestre de 2008, o transporte de 72% da carga enviada ao porto de Santos foi feito por rodovias.

b')
No primeiro semestre de 2008, foram transportadas 29,1 – 2,7 = 26,4 milhões de toneladas de carga. Se 8,8 milhões de toneladas correspondem a 24% do total transportado, então a carga transportada nesse período é igual a 8,8/0,24 ≈ 36,7 milhões de toneladas. Assim, o percentual transportado por rodovias corresponde a 26,4 x 100 / 36,7 ≈ 72% do total.

Resposta: No primeiro semestre de 2008, o transporte de 72% da carga enviada ao porto de Santos foi feito por rodovias.

Questão 2

a)
Para manter a lâmpada incandescente acesa por 750 horas, gasta-se 750 x 0,1 x 0,5 = R$ 37,50 com o consumo de energia.
Já para manter a lâmpada fluorescente acesa pelo mesmo período, gasta-se 750 x 0,024 x 0,5 = R$ 9,00.

Resposta: O gasto com a lâmpada incandescente atinge R$ 37,50, enquanto o gasto com a lâmpada fluorescente é igual a R$ 9,00.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b)
Se d é o número de dias transcorridos desde a compra das lâmpadas, podemos dizer que o gasto de João com cada ponto de luz da casa é dado por J(d) = 13,4 + 0,5 x 0,024 x 3d = 13,4 + 0,036d. Já o gasto de Fernando com cada ponto de luz é dado por F(d) = 2 + 0,5 x 0,1 x 3d = 2 + 0,15d.
Considerando J(d) < F(d), obtemos 13,4 + 0,036d < 2 + 0,15d, ou (0,15 – 0,036)d > (13,4 – 2), ou ainda 0,114d > 11,4. Logo, d > 11,4/0,114 = 100.

Resposta: Depois de 100 dias, Fernando terá gasto mais com iluminação do que João.

Questão 3

a)
O número de forminhas azuis é igual a $F_A = 2n + 2(m – 2) = 2n + 2m – 4$. Já o número de forminhas vermelhas é igual a $F_V = (n – 2)(m – 2) = nm – 2m – 2n + 4$.
Igualando as duas expressões, obtemos $4n + 4m – mn – 8 = 0$. Como $m = 3n/4$, temos $7n – 3n^2/4 – 8 = 0$, ou $3n^2 – 28n + 32 = 0$. Usando a fórmula de Báskara, obtemos

$$n = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4.3.32}}{2.3} = \frac{28 \pm 20}{6}$$

Assim, $n = 8$ ou $n = 4/3$. Como n deve ser um número inteiro, concluímos que $n = 8$ e $m = 3x8/4 = 6$, de modo que a bandeja tem 6x8 = 48 brigadeiros.

Resposta: A bandeja tem 48 brigadeiros.

a')
O número de forminhas vermelhas é igual a $F_V = (n – 2)(m – 2) = nm – 2m – 2n + 4$. Já o número de forminhas azuis é a metade do número total de forminhas, ou seja, $F_A =$ nm/2.
Igualando as duas expressões, obtemos $nm/2 – 2m – 2n + 4 = 0$. Como $n = 4m/3$, temos $2m^2/3 – 14m/3 – 4 = 0$, ou $m^2 – 7m + 6 = 0$. Usando a fórmula de Báskara, obtemos

$$m = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4.6}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

Assim, $m = 6$ ou $m = 1$. No primeiro caso, $n = 4.6/3 = 8$. No segundo caso, $n = 4.1/3 = 4/3$. Como n deve ser um número inteiro, concluímos que $n = 8$ e $m = 6$, de modo que a bandeja tem 6x8 = 48 brigadeiros

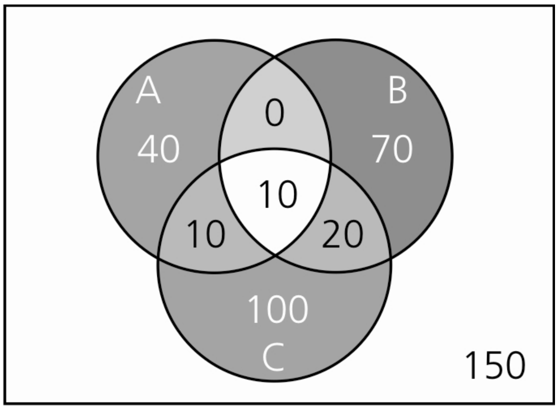
Resposta: A bandeja tem 48 brigadeiros.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b)
Cada brigadeiro tem 1 cm de raio. Assim, sem contar o chocolate granulado, o volume de um brigadeiro é igual a $4\pi r^3/3 = 4\pi/3 \approx 4x3,14/3 \approx 4,19$ cm^3.
Logo, somando os 400 brigadeiros, obtemos um volume total aproximado de 400x4,19 = 1676 cm^3. Como 1 litro corresponde a 1000 cm^3, 400 brigadeiros correspondem a cerca de 1676/1000 = 1,676 litros. Portanto, é necessário comprar 2 latas da massa pronta.

Resposta: A pessoa tem que comprar 2 latas da massa de brigadeiro.

Questão 4



a)
O diagrama ao lado fornece as informações que podem ser extraídas do enunciado. Como se vê, o número de sócios que poderiam votar em B ou em C, mas não em A, é dado por $|B \cap C \cap (\neg A)| = 190 - 70 - 100 = 20$.
Por outro lado, o número de sócios que pretendem participar da eleição mas não votariam em B é dado por $|A \cup C| - |A \cap B| - |B \cap C \cap (\neg A)| = 40 + 10 + 100 = 150$.

Resposta: 20 sócios estão em dúvida entre os candidatos B e C, mas não votariam em A. Dentre os sócios que pretendem participar da eleição, 150 não votariam no candidato B.

b)
O número de entrevistados é igual a 150 + 40 + 70 + 100 + 0 + 10 + 20 +10 = 400. O número de entrevistados em dúvida é igual a $|A \cap C \cap (\neg B)| + |A \cap B \cap (\neg C)| + |B \cap C \cap (\neg A)| + |A \cap B \cap C| = 10 + 0 + 20 + 10 = 40$.
Assim, se escolhermos um dos 400 entrevistados ao acaso, a probabilidade de ele ainda não ter decidido em qual candidato irá votar é igual a 40/400 = 0,1. Como a pesquisa reflete fielmente a realidade, a probabilidade de um sócio ainda não ter decidido em quem votar é igual a 0,1, ou 10%.

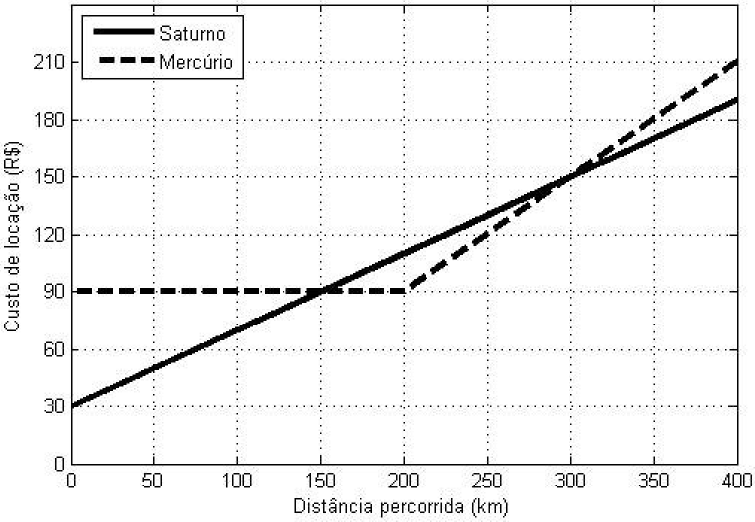
Resposta: A probabilidade de um sócio não ter escolhido ainda o seu candidato é igual a 0,1, ou 10%.

b')
O número de entrevistados é igual a 150 + 40 + 70 + 100 + 0 + 10 + 20 +10 = 400. O número de entrevistados em dúvida é igual a $|A \cap C \cap (\neg B)| + |A \cap B \cap (\neg C)| + |B \cap C \cap (\neg A)| + |A \cap B \cap C| = 10 + 0 + 20 + 10 = 40$.
Escolhendo um dos entrevistados ao acaso, a probabilidade de que ele participe da eleição é igual a 250/400. Considerando, agora, apenas os entrevistados que participarão da eleição, a probabilidade de que um deles, escolhido ao acaso, esteja em dúvida é igual a 40/250. Assim, se escolhermos um dos sócios ao acaso, a probabilidade de ele ainda não ter decidido em qual candidato irá votar é igual a (250/400).(40/250) = 0,1. Como a pesquisa reflete fielmente a realidade, a probabilidade de um sócio ainda não ter decidido em quem votar é igual a 0,1, ou 10%.

Resposta: A probabilidade de um sócio não ter escolhido ainda o seu candidato é igual a 0,1, ou 10%.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 5



a)

As funções que descrevem o custo diário de locação em função de d, a distância percorrida por dia, são:

$$c_S(d) = 30 + 0{,}4d.$$

$$c_M(d) = \begin{cases} 90, & \text{se } d \le 200; \\ 90 + 0{,}6(d - 200), & \text{se } d > 200. \end{cases}$$

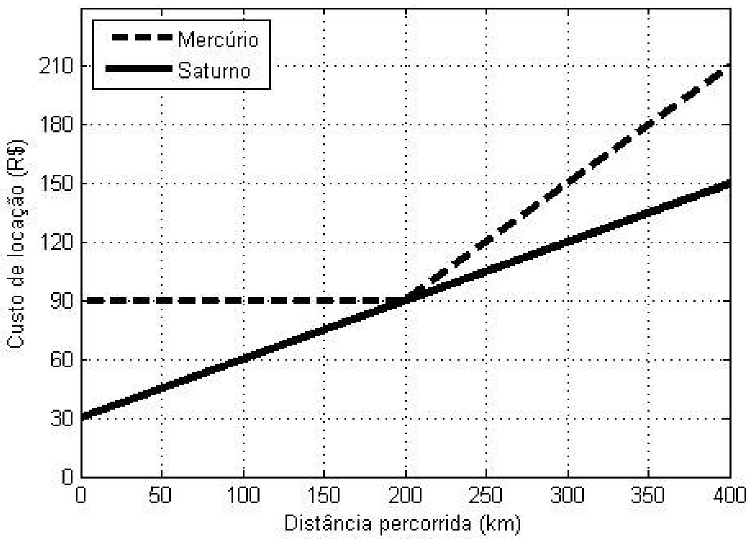
Essas funções estão representadas no gráfico ao lado.

b)

Para encontrar o primeiro ponto de interseção das curvas, resolvemos a equação 30 + 0,4d = 90. Neste caso, d = 60/0,4 = 150 km.

O segundo ponto de interseção é dado pela solução de 30 + 0,4d = 90 + 0,6(d − 200). Simplificando esta equação, obtemos 0,2d = 60, de modo que d = 300. Como se observa, para 150 ≤ d ≤ 300, a locadora Mercúrio é a mais barata. Nos outros intervalos a Saturno tem o plano mais barato.

Para que a locadora Saturno obtenha o maior lucro possível e seja sempre a mais vantajosa, é necessário que a curva que descreve seu custo passe pelo ponto (200, 90), como mostra o gráfico ao lado. Suponha, então, que c seja seu novo custo por quilômetro. Neste caso, devemos ter 30 + 200c = 90, ou c = 60/200 = R$ 0,30.



Resposta: A locadora Mercúrio é a mais barata para distâncias maiores que 150 km e menores que 300 km. Para distâncias menores que 150 km ou maiores que 300km, a Saturno é a mais barata. Para que seja sempre a mais vantajosa, a locadora Saturno deve cobrar R$ 0,30 por quilômetro rodado.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 6

a)
Existem $C_{8,2}$ = 8x7/2 = 28 pares diferentes de ingressos que podem ser dados para o casal. Dentre esses pares de ingressos, existem exatamente 7 que correspondem a cadeiras vizinhas. Assim, a probabilidade de o casal ter recebido um par de ingressos de cadeiras vizinhas é igual a 7/28 = 1/4, ou 25%.

Resposta: A probabilidade de o casal ter recebido ingressos consecutivos é de 1/4, ou 25%.

a')
Existem P_8 = 8! maneiras diferentes de distribuir 8 ingressos entre 8 pessoas. Dessas formas de distribuir os ingressos, o casal recebe bilhetes consecutivos em $P_2.P_7$ = 2!.7! dos casos. Assim, a probabilidade de o casal ter recebido um par de ingressos de cadeiras vizinhas é igual a 2!.7!/8! = 1/4, ou 25%.

Resposta: A probabilidade de o casal ter recebido ingressos consecutivos é de 1/4, ou 25%.

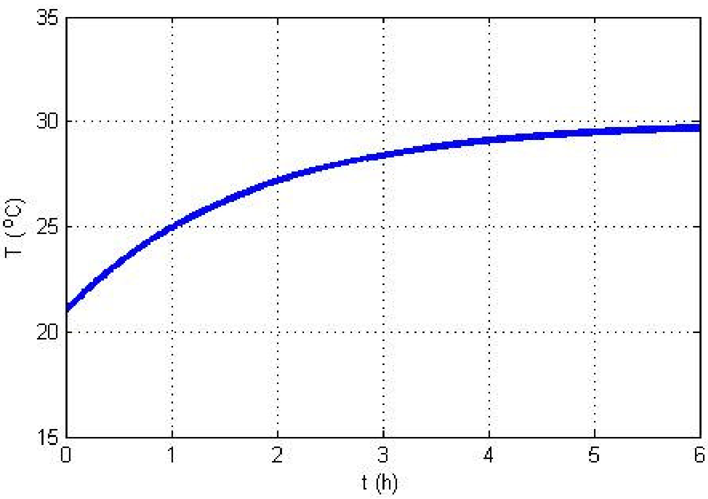
b)
O número de cadeiras na fila k é igual a c_k = 6 + 2k. Somando o número de cadeiras das n filas, obtemos $\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n}(6+2k) = \frac{n(8+6+2n)}{2} = 7n + n^2$. Se o teatro tem 144 cadeiras, então $7n + n^2 = 144$, ou $n^2 + 7n - 144 = 0$. Usando a fórmula de Báskara, obtemos

$$n = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 + 4.1.144}}{2.1} = \frac{-7 \pm 25}{2}.$$

Assim, n = –16 ou n = 9. Como n > 0, o teatro tem 9 filas.

Resposta: O teatro tem n^2 + 7n cadeiras. Se há 144 cadeiras, estas estão dispostas em 9 filas.

Questão 7



a)
Passadas 4 horas da quebra do aparelho de ar condicionado, a temperatura dentro do ônibus era igual a $T(4) = 30 - 9x10^{-1}$ = 29,1°C.
O gráfico da função T(t) é apresentado ao lado. Como se observa, a função vale 21 quando t = 0 e se aproxima de 30 à medida que t cresce.

Resposta. Quando t = 4 h, a temperatura atingiu 29,1°C. O gráfico de T(t) é dado ao lado.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b)
O instante desejado é aquele no qual $T(t) = 21 + 4 = 25$ºC, ou seja, precisamos determinar t, tal que $30 - 9\text{x}10^{-t/4} = 25$. Assim, temos $10^{-t/4} = 5/9$.
Aplicando o logaritmo (na base 10) nos dois lados da equação, obtemos $-t/4 = \log(5) - \log(3^2)$, ou seja, $t = 4(2\log(3) - \log(5)) \approx 4(2\text{x}0{,}48 - 0{,}70) = 1{,}04$ hora. Logo, t = 1h2m24s.

Resposta: A temperatura subiu 4ºC depois de transcorrida 1,04 hora, ou 1h2m24s.

Questão 8

a)
Os dados do enunciado nos permitem formular o seguinte sistema de equações lineares, no qual cada equação está associada a uma papelaria:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 23 \\ x + y + 4z &= 25 \end{aligned}$$

Multiplicando a segunda linha por -2 e somando o resultado à primeira linha, obtemos $-x - 5z = -27$. Assim, $x = 27 - 5z$.
Subtraindo, agora, a segunda linha da primeira, obtemos $y - z = -2$, de modo que $y = z - 2$.

Resposta: $x = 27 - 5z$ e $y = z - 2$.

b)
Tomando $y \geq 1$, temos $z - 2 \geq 1$, ou seja, $z \geq 3$. Da mesma forma, exigindo que $x \geq 1$, temos $27 - 5z \geq 1$, ou $z \leq 27/5$. Como z precisa ser um número inteiro, concluímos que $z \leq 5$. Assim, $3 \leq z \leq 5$.
Para z = 3, temos y = 1 e x = 12. Para z = 4, temos y = 2 e x = 7. Finalmente, para z = 5, temos y = 3 e x = 2.

Resposta: As quantidades possíveis são (x, y, z) = (12, 1, 3), ou (x, y, z) = (7, 2, 4), ou ainda (x, y, z) = (2, 3, 5).

Questão 9

a)
A parte superior do sapo é um pentágono. Sua área é dada pela soma das áreas de um retângulo e de um triângulo. O retângulo tem lados iguais a c/4 e c/2, de modo que sua área é de $(c/4)(c/2) = c^2/8$. O triângulo tem base igual a c/2 e altura c/4, fornecendo uma área de $(c/2)(c/4)/2 = c^2/16$. Logo, a área total da parte superior é de $3c^2/16$. Para que essa área valha 12 cm^2, é preciso que $3c^2/16 = 12$, ou $c^2 = 64$. Logo, c = 8 cm.

Resposta: Para a parte superior do sapo ter 12cm^2, é preciso que o retângulo tenha 8 x 16 cm.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

a')

A parte superior do sapo é um pentágono, cuja área é o dobro da área de um trapézio com bases paralelas de comprimento c/4 e c/2, e com altura c/4. A área de tal trapézio é igual a $A_T = (1/2).(c/4 + c/2).(c/4) = 3c^2/32$. Logo, a área total da parte superior é $2A_T = 3c^2/16$. Para que essa área valha 12 cm^2, é preciso que $3c^2/16 = 12$, ou $c^2 = 64$. Logo, c = 8 cm.

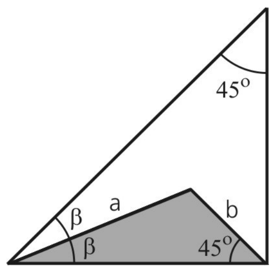
Resposta: Para a parte superior do sapo ter 12cm², é preciso que o retângulo tenha 8 x 16 cm.

a'')

A parte superior do sapo é um pentágono, cuja área é dada por $A_G - 2A_P$, onde A_G é a área de um triângulo com base c e altura c/2, e A_P é a área de um triângulo com base e altura iguais a c/4. Assim, $A_G = c.(c/2)/2 = c^2/4$ e $A_P = (c/4)^2/2 = c^2/32$. Assim, a área do pentágono é de $c^2/4 - 2c^2/32 = 3c^2/16$. Para que essa área valha 12 cm^2, é preciso que $3c^2/16 = 12$, ou $c^2 = 64$. Logo, c = 8 cm.

Resposta: Para a parte superior do sapo ter 12cm², é preciso que o retângulo tenha 8 x 16 cm.

b)



A partir da figura fornecida no enunciado, podemos concluir que 2β = 45º, de modo que β = 22,5º.

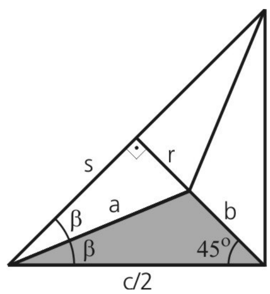
A lei dos senos nos fornece a equação a/sen(45º) = b/sen(22,5º), de modo que a/b = sen(45º)/sen(22,5º).

Como sen(45º) = sen(22,5º + 22,5º) = 2sen(22,5º)cos(22,5º), concluímos que a/b = 2cos(22,5º).

Para calcular cos(22,5º), usamos a fórmula $\cos(45º) = \cos^2(22,5º) - \text{sen}^2(22,5º)$, que fornece $\cos(45º) = 2\cos^2(22,5º) - 1$. Deste modo, $\cos^2(22,5º) = (\cos(45º) + 1)/2 = \left(\sqrt{2}+2\right)/4$. Logo, $\cos(22,5º) = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,/2$, donde $a/b = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Resposta: A razão entre as duas arestas é igual a $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

b')



Observando a figura ao lado, concluímos que 2β = 45º, de modo que β = 22,5º.

Assim, (r + b) = s. Mas r = a.sen(β) e s = a.cos(β), de modo que b = s – r = a[cos(β) – sen(β)]. Logo, a/b = 1/[cos(β) – sen(β)].

Para calcular cos(22,5º), usamos a fórmula $\cos(45º) = \cos^2(22,5º) - \text{sen}^2(22,5º)$, que fornece $\cos(45º) = 2\cos^2(22,5º) - 1$. Deste modo, $\cos^2(22,5º) = (\cos(45º) + 1)/2 = \left(\sqrt{2}+2\right)/4$. Logo, $\cos(22,5º) = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,/2$.

Para obter sen(22,5º), basta fazer $\text{sen}(22,5º) = \sqrt{1-\cos^2(22,5º)} = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,/2$. Assim, $a/b = 2\Big/\left[\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right]$.

Resposta: A razão entre as duas arestas é igual a $2\Big/\left[\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right]$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b'')

Observando a figura do item (b'), concluímos que $2\beta = 45°$, de modo que $\beta = 22{,}5°$.

Pelo teorema da bissetriz interna, temos $s/r = (c/2)/b$. Como $(c/2)$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem s, temos também $(c/2)^2 = 2s^2$, ou $c/2 = s\sqrt{2}$.

Voltando ao teorema, obtemos $s/r = s\sqrt{2}/b$, ou simplesmente $b = r\sqrt{2}$. Mas $r = a.\text{sen}(\beta)$, de modo que $b = a.\text{sen}(\beta)\sqrt{2}$, o que implica que $a/b = 1/\left[\text{sen}(\beta)\sqrt{2}\right]$.

Para calcular sen(22,5°), usamos a fórmula $\cos(45°) = \cos^2(22{,}5°) - \text{sen}^2(22{,}5°)$, que fornece $\cos(45°) = 1 - 2\text{sen}^2(22{,}5°)$. Deste modo, $\text{sen}^2(22{,}5°) = (1 - \cos(45°))/2 = \left(2 - \sqrt{2}\right)/4$, e $\text{sen}(22{,}5°) = \sqrt{2 - \sqrt{2}}/2$.

Logo, $a/b = 2\big/\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Resposta: A razão entre as duas arestas é igual a $2\big/\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

b''')

Observando a figura do item (b'), concluímos que $2\beta = 45°$, de modo que $\beta = 22{,}5°$.

A lei dos cossenos nos fornece a equação $b^2 = (c/2)^2 + a^2 - 2a(c/2)\cos(\beta)$.

Como $(c/2)$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem s, temos $(c/2)^2 = 2s^2$, ou $c/2 = s\sqrt{2}$. Assim, $b^2 = (s\sqrt{2})^2 + a^2 - 2as\sqrt{2}\cos(\beta)$.

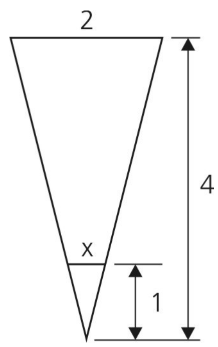
Usando a relação $s = a.\cos(\beta)$, obtemos $b^2 = 2a^2\cos^2(\beta) + a^2 - 2a^2\sqrt{2}\cos^2(\beta)$, de modo que $b^2/a^2 = (2 - 2\sqrt{2})\cos^2(\beta) + 1$. Logo, $a/b = 1\big/\sqrt{(2 - 2\sqrt{2})\cos^2(\beta) + 1}$.

Para calcular $\cos^2(22{,}5°)$, usamos a fórmula $\cos(45°) = \cos^2(22{,}5°) - \text{sen}^2(22{,}5°)$, que fornece $\cos(45°) = 2\cos^2(22{,}5°) - 1$. Deste modo, $\cos^2(22{,}5°) = (\cos(45°) + 1)/2 = \left(\sqrt{2} + 2\right)/4$. Logo, $a/b = 2\big/\sqrt{(2 - 2\sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) + 4}$ $= 2\big/\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Resposta: A razão entre as duas arestas é igual a $2\big/\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Questão 10

a)



Fazendo um corte vertical na caixa d'água, de modo a dividir cada base do tronco de pirâmide em dois retângulos iguais, obtemos a figura ao lado. Usando a semelhança de triângulos, constatamos que $2/4 = x/1$, ou seja, $x = 1/2$.

O volume da pirâmide maior é igual a $V_G = A_G.h_G/3$, em que A_G é a área do quadrado de aresta 2 m e $h_G = 4$ m. Assim, $V_G = 2.2.4/3 = 16/3\ m^3$.

O volume da pirâmide menor é dado por $V_P = A_P.h_P/3$, em que a_P é a área do quadrado de aresta (1/2) m e $h_P = 1$ m. Assim, $V_P = (1/2).(1/2).1/3 = 1/12\ m^3$.

O volume do tronco de pirâmide é $V_G - V_P = 16/3 - 1/12 = 63/12 = 21/4\ m^3$.

Resposta: A caixa d'água comporta 21/4 m^3.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

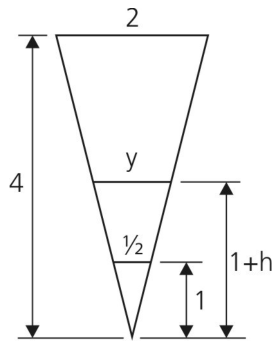
a')
Fazendo um corte vertical na caixa d'água, de modo a dividir cada base do tronco de pirâmide em dois retângulos iguais, obtemos a figura acima. A pirâmide de altura 1, cuja base tem aresta x, é semelhante à pirâmide de altura 4, cuja base tem aresta 2. A razão entre os volumes dessas pirâmides é igual ao cubo da razão entre as alturas, ou seja, $V_P/V_G = 1/4^3 = 1/64$. Assim, o volume da pirâmide menor é $V_P = V_G/64$.
O volume da caixa d'água é igual a $V_G - V_P = (1 - 1/64)A_G.h_G/3 = (63/64).2.2.4/3 = 21/4\ m^3$.

Resposta: A caixa d'água comporta 21/4 m³.

a'')
Fazendo um corte vertical na caixa d'água, de modo a dividir cada base do tronco de pirâmide em dois retângulos iguais, obtemos a figura acima, a partir da qual, usando a semelhança de triângulos, constatamos que 2/4 = x/1, ou seja, x = 1/2.
O volume de um tronco de pirâmide de bases paralelas é dado por $V = \left(h/3\right)\left(A_G + A_P + \sqrt{A_G A_P}\right)$, onde h é a altura do tronco de pirâmide, e A_G e A_P são as áreas de suas bases.
Para o tronco em questão, temos $A_G = 2^2 = 4$, $A_P = (1/2)^2 = 1/4$ e h = 3. Logo, $V = \left(3/3\right)\left(4 + (1/4) + \sqrt{4.(1/4)}\right)$, ou $V = 21/4\ m^3$.

Resposta: A caixa d'água comporta 21/4 m³.

b)
Seja h a altura do nível d'água e y o comprimento da aresta da seção quadrada do tronco de pirâmide que está a uma altura h da base inferior da caixa d'água (ver figura ao lado). Usando novamente a semelhança de triângulos, obtemos y/(1 + h) = 2/4, ou h = 2y – 1.
O volume d'água até a altura h é dado por $V = A_B.(h + 1)/3 - 1/12 = y^2(2y - 1 + 1)/3 - 1/12$. Assim, $V = 2y^3/3 - 1/12$. Se V = 13/6, então $(8y^3 - 1)/12 = 13/6$, ou $8y^3 = 27$. Logo, $y = \sqrt[3]{27/8} = 3/2$ m e h = 2y – 1 = 2 m.



Resposta: O nível d'água está a 2 m da base menor da caixa d'água.

b')
Seja h a altura do nível d'água e y o comprimento da aresta da seção quadrada do tronco de pirâmide que está a uma altura h da base inferior da caixa d'água (ver figura acima). Usando semelhança de triângulos novamente, obtemos (1 + h)/y = 4/2, ou y = (1 + h)/2.
O volume d'água até a altura h é dado por $V = A_B.(h + 1)/3 - 1/12 = (1 + h)^3/12 - 1/12$. Se V = 13/6, então $[(1 + h)^3 - 1]/12 = 13/6$, ou $(1 + h)^3 = 27$. Logo, (1 + h) $(1+h) = \sqrt[3]{27} = 3$ m e h = 3 – 1 = 2 m.

Resposta: O nível d'água está a 2 m da base menor da caixa d'água.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b'')

Seja h a altura do nível d'água (ver figura acima). O volume da pirâmide de altura (h + 1) é igual a $V_N = V + V_P$, onde V é o volume do tronco de pirâmide e V_P é o volume da pirâmide de altura 1. Assim, $V_N = 13/6 + 1/12 = 9/4\ m^3$.

Usando a semelhança das pirâmides, concluímos que $V_N/V_P = (1 + h)^3/1^3$, donde $(1 + h)^3 = (9/4)/(1/12) = 27$. Obtemos, assim, $1 + h = \sqrt[3]{27} = 3$, de modo que h = 2 m.

Resposta: O nível d'água está a 2 m da base menor da caixa d'água.

Questão 11

a)

Como o ponto P está sobre a circunferência, suas coordenadas satisfazem $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Ao mesmo tempo, por P estar sobre a semirreta, temos $y / x = \tan(30°) = \sqrt{3}/3$, ou seja, $y = x\sqrt{3}/3$.

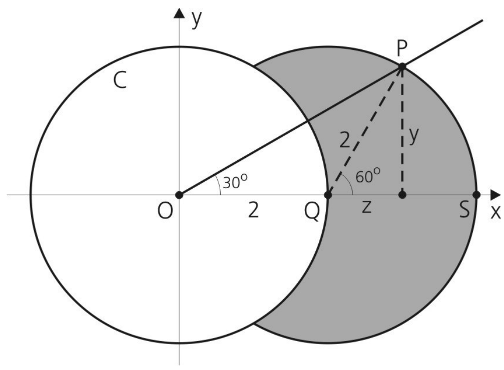
Voltando à primeira equação, obtemos $(x - 2)^2 + (x\sqrt{3}/3)^2 = 4$. Deste modo, $x(4x / 3 - 4) = 0$. Logo, os pontos de interseção da semirreta com a circunferência centrada em (2, 0) têm abscissas x = 0 e x = 3. Como P é o ponto de interseção com maior abscissa, concluímos que x = 3 e $y = x\sqrt{3} / 3 = \sqrt{3}$.

Resposta: Em P, x = 3 e $y = \sqrt{3}$.

a')

Como obsevamos na figura ao lado, o ângulo $S\hat{O}P$ está inscrito na circunferência de centro Q. Assim, sua medida é igual à metade da medida do ângulo central $S\hat{Q}P$. Logo, o segmento de reta PQ faz um ângulo de 60º com o eixo x.

Além disso, esse segmento mede 2. Assim, temos sen(60º) = y/2 e cos(60º) = z/2. Desta forma, y = 2sen(60º) = $\sqrt{3}$, e x = 2 + z = 2 + 2cos(60º) = 2 + 1 = 3.



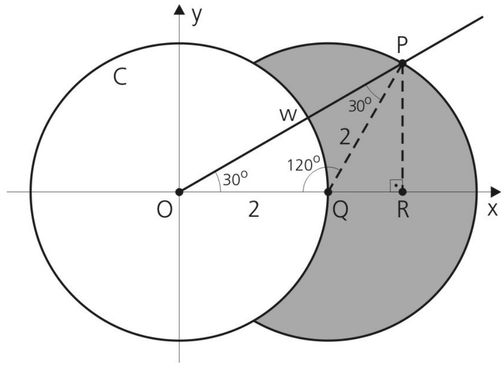
Resposta: Em P, x = 3 e $y = \sqrt{3}$.

a'')

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo OQP (ver figura ao lado), obtemos $w^2 = 2^2 + 2^2 - 2.2.2.\cos(120°) = 2^2 + 2^2 + 2.2.2.\cos(60°) = 8 + 8.(1/2) = 12$. Logo, $w = 2\sqrt{3}$. Usando, então, o triângulo POR, obtemos as coordenadas do ponto P:

$$y = w.\text{sen}(30°) = 2\sqrt{3}.(1/2) = \sqrt{3}.$$

$$x = w.\cos(30°) = 2\sqrt{3}.(\sqrt{3}/2) = 3.$$

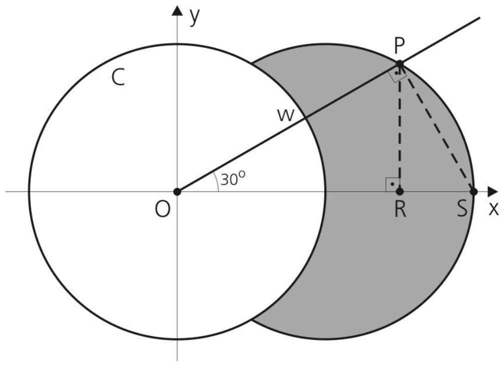


Resposta: Em P, x = 3 e $y = \sqrt{3}$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

a''')

Como se observa na figura ao lado, o triângulo OPS é retângulo, pois a aresta OS é um diâmetro da circunferência centrada no ponto (2, 0). Além disso, por ser a hipotenusa do triângulo OPS, a aresta OS mede 4. Assim, $w = 4\cos(30^o) = 4\sqrt{3}/2 = 2\sqrt{3}$.



Recorrendo, então, ao triângulo OPR, que também é retângulo, obtemos as coordenadas do ponto P:

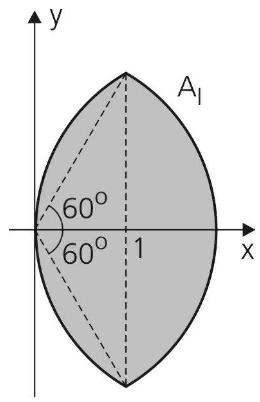
$$y = w.\text{sen}(30^o) = 2\sqrt{3}.(1/2) = \sqrt{3}.$$

$$x = w.\cos(30^o) = 2\sqrt{3}.(\sqrt{3}/2) = 3.$$

Resposta: Em P, x = 3 e y = $\sqrt{3}$ **.**

b)

A área da região sombreada corresponde a $A_C - A_I$, em que A_C é a área do círculo de raio 2 e A_I é a área da interseção dos dois círculos. Os pontos de interseção das duas circunferências satisfazem $x^2 + y^2 = 4$ e $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Assim, concluímos que $x = 1$ e $y = \pm\sqrt{3}$.



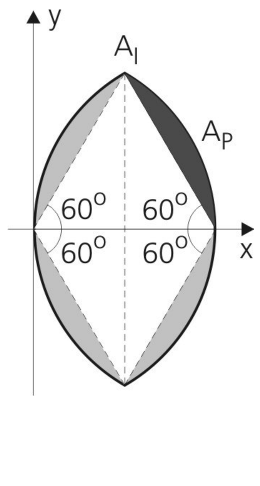
Como o segmento de reta que liga a origem ao ponto de interseção no primeiro quadrante tem comprimento 2, podemos concluir que o cosseno do ângulo entre este segmento e o eixo x vale 1/2, de modo que o ângulo é igual a 60º.

A figura ao lado indica que $A_I = 2(A_S - A_T)$, onde A_S é a área do setor circular com ângulo de 120º, e A_T é a área do triângulo de base $2\sqrt{3}$ e altura 1. Assim, $A_I = 2(\pi 2^2/3 - 1\cdot 2\sqrt{3}/2) = 8\pi/3 - 2\sqrt{3}$. Logo a área desejada é $A_C - A_I = \pi 2^2 - 8\pi/3 + 2\sqrt{3} = 4\pi/3 + 2\sqrt{3}$.

Resposta: A região sombreada tem área igual a $4\pi/3 + 2\sqrt{3}$ **.**

b')

Seja A_I a área da interseção dos dois círculos, como ilustrado na figura ao lado. Dividindo A_I ao meio, na horizontal, podemos inscrever na região resultante um triângulo equilátero de arestas iguais a 2. A área desse triângulo é $A_T = 2^2\sqrt{3}/4 = \sqrt{3}$.



Já a área da região A_P, indicada na figura, é a diferença entre a área de um setor circular e a área do triângulo equilátero, ou seja, $A_P = r^2\theta/2 - A_T$. Assim, $A_P = 2^2(\pi/3)/2 - \sqrt{3} = 2\pi/3 - \sqrt{3}$. Como $A_I = 2A_T + 4A_P$, temos $A_I = 8\pi/3 - 2\sqrt{3}$.

A área desejada corresponde a $A_C - A_I$, em que A_C é a área do círculo de raio 2. Deste modo, a área desejada é $\pi 2^2 - 8\pi/3 + 2\sqrt{3} = 4\pi/3 + 2\sqrt{3}$.

Resposta: A região sombreada tem área igual a $4\pi/3 + 2\sqrt{3}$ **.**

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 12

a)

Se n = 2, então $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $f(x+h) = a_2(x+h)^2 + a_1(x+h) + a_0$. Assim,

$$f(x+h) = a_2x^2 + 2a_2xh + a_2h^2 + a_1x + a_1h + a_0 = f(x) + 2a_2xh + a_2h^2 + a_1h = f(x) + h(2a_2x + a_1 + a_2h).$$

Logo, $[f(x+h) - f(x)]/h = 2a_2x + a_1 + a_2h$. Por outro lado, $g(x) = 2a_2x + a_1$ e

$$g(x + h/2) = 2a_2(x + h/2) + a_1 = 2a_2x + a_2h + a_1 = [f(x+h) - f(x)]/h.$$

b)

Se n = 3 e $a_3 = 1$, então $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $g(x) = 3x^2 + 2a_2x + a_1$. Como f(1) = g(1) = f(–1) = 0, temos o sistema linear

$$\begin{array}{rcrcl} f(1) & = & 1 + a_2 + a_1 + a_0 & = & 0 \\ f(-1) & = & -1 + a_2 - a_1 + a_0 & = & 0 \\ g(1) & = & 3 + 2a_2 + a_1 & = & 0 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcr} a_0 + a_1 + a_2 & = & -1 \\ a_0 - a_1 + a_2 & = & 1. \\ a_1 + 2a_2 & = & -3 \end{array}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos $2a_1 = -2$, de modo que $a_1 = -1$. Em seguida, da terceira equação, deduzimos que $-1 + 2a_2 = -3$, ou $a_2 = -1$. Finalmente, da primeira equação, obtemos $a_0 - 1 - 1 = -1$, de modo que $a_0 = 1$.

Resposta: O polinômio é $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

b')

Se n = 3 e $a_3 = 1$, então $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $g(x) = 3x^2 + 2a_2x + a_1$. Como f(1) = f(–1) = 0, observamos que $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ são raízes do polinômio. Chamando de x_3 a terceira raiz, temos $f(x) = (x-1)(x+1)(x-x_3) = x^3 - x_3x^2 - x + x_3$. Assim, $a_2 = -x_3$, a1 = –1 e $a_0 = x_3 = -a_2$. Como g(1) = 0, temos $3 + 2a_2 + a_1 = 0$, donde $a_2 = (-3 - a_1)/2 = -1$. Logo, $a_0 = 1$.

Resposta: O polinômio é $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.