RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

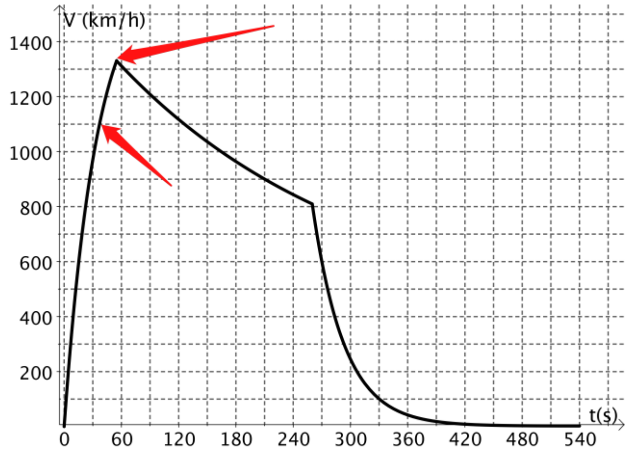
Questão 13

a)
Considerando uma Progressão Aritmética com $a_0 = 0\,km$ e razão $r = 35\frac{km}{h \times s}$,

$$a_{30} = a_0 + r \times 30s = 0 + 35\frac{km}{h \times s} \times 30s = 1050\frac{km}{h}.$$

b)
A velocidade máxima atingida foi um pouco mais que 1.300km/h.

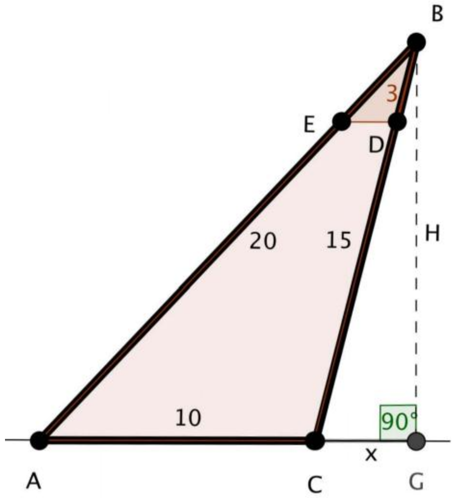
O saltador atingiu a velocidade do som em torno de 45 s.



Questão 14

a)
Por semelhanças de triângulos,

$$\frac{H}{15} = \frac{h}{3} \Rightarrow \frac{H}{h} = \frac{15}{3} = 5$$



RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b)
Considerando os dois triângulos retângulos ABG e CBG, podemos escrever

$$(10+x)^2 + H^2 = 20^2, \quad x^2 + H^2 = 15^2.$$

Desenvolvendo a primeira equação e eliminando x, obtemos

$$10^2 + 20x + x^2 + H^2 = 20^2 \Leftrightarrow 10^2 + 20x + 15^2 = 20^2 \Longrightarrow 20x = 20^2 - 10^2 - 15^2 = 400 - 100 - 225 = 75.$$

Portanto,

$$x = \frac{75}{20} = \frac{15}{4}.$$

E, assim,

$$\mathrm{H}^2 = 15^2 - \mathrm{x}^2 = 15^2\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = 15^2 \times \frac{15}{4^2} \Rightarrow H = \frac{15}{4}\sqrt{15} \approx 14{,}52.$$

É possível usar a fórmula de Heron em conjunto com a definição da área do triângulo.

Questão 15

a)
Seja x o comprimento de um dos lados. Então, $x \times 2x = 32 \times 10^4 m^2 \Rightarrow x = 400m$. Os quatro retângulos laterais da APP terão área $6x \times 100m^2 = 24 \times 10^4 m^2$.
Para completar a APP, há quatro setores circulares iguais a um quarto de círculo de raio $100\ m$, resultando em um círculo completo de área $\pi \times 100^2 m^2 = \pi \times 10^4 m^2$. Assim, a APP será de $(24+\pi) \times 10^4 m^2$.

b)

$$\frac{V(t)}{V_0} = 10\% = 0,1 \Rightarrow 2^{-t} = \frac{1}{10} \Longrightarrow 2^t = 10 \Rightarrow t\log_{10} 2 = 1 \Longrightarrow t = \frac{1}{\log_{10} 2} \approx \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$$

Ou seja, aproximadamente 3 meses e 10 dias.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 16

a)

$$\frac{t-t_0}{x-x_0}=\frac{t_m-t_0}{x_m-x_0}\Leftrightarrow\frac{t-35}{x-23,8}=\frac{42-35}{27,3-23,8}=\frac{7}{3,5}=2$$

De

$$\frac{t-35}{x-23,8}=2\ ,$$

segue que

$$t=2x-2\times 23,8+35=2x-12,6$$

e

$$x=t/2-35/2+23,8=\frac{t}{2}+6,3\ .$$

Assim,

$$a=2\times cm^{-1},\ b=-12,6,\ c=\tfrac{1}{2}\times cm \text{ e } d=6,3\times cm.$$

b)

$$n_5=n_1+\frac{1}{2}\times 4=5+2=7\Longrightarrow f(c_5)=7$$

$$\Rightarrow\frac{5}{3}(c_5-20)=7\Rightarrow c_5=\frac{21}{5}+20=4+\frac{1}{5}+20=24,2$$

Portanto, $c_5=24,2\text{ cm.}$

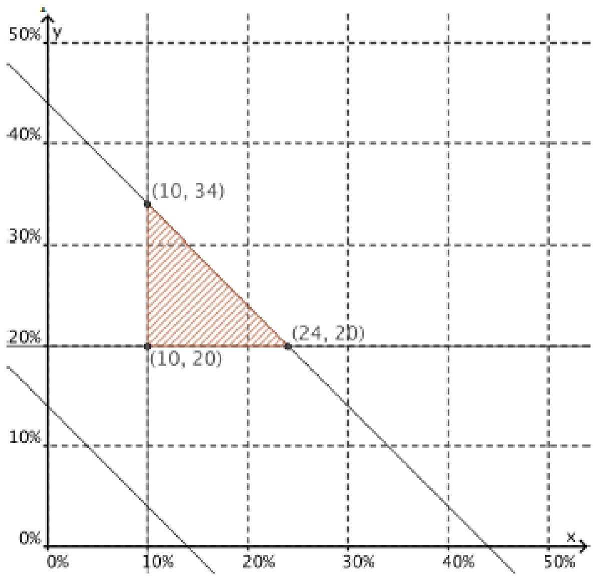
Questão 17

a)
A solução do sistema é obtida por substituição revertida.

$$\begin{cases}3x+y-z & =0,20\Rightarrow 3x=(0,20-0,15+0,25)=0,30\Rightarrow x=0,10=10\%\\ \quad 2y+z & =0,55\Rightarrow 2y=0,55-0,25=0,3\Rightarrow y=0,15=15\%\\ \qquad\quad z & =0,25=25\%\end{cases}$$

b)
Substituindo o valor de $z=10\%$, temos $14\%\le x+y\le 44\%$, que define uma região entre duas retas. As outras duas retas paralelas aos eixos, $x=10\%$ e $y=20\%$, estabelecem a fronteira esquerda e a fronteira inferior da região, respectivamente.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA



Questão 18

a)
2 cursos: 2 x 600 = 1.200. O desconto de 20% é igual a 240. Assim,

$$\frac{240}{600} = 0,4 = 40\% \cdot$$

3 cursos: 3 x 600 = 1.800. O desconto de 30% é igual a 540. Assim:

$$\frac{540}{600} = 0,9 = 90\% \; .$$

b)
Matriculados em pelo menos dois cursos: 3+2+4+7=16 alunos
Total de alunos: 16+6+8+9= 39 alunos.

Probabilidade de um aluno estar matriculado em apenas um curso:

$$\frac{39-16}{39} = \frac{23}{39} \approx 59\%$$

Questão 19

a)
$y = constante$ implica $2 - p = 0 \Rightarrow p = 2$.
Substituindo esses valores na expressão, obtemos $5y + 16 + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{20}{5} = -4$. Portanto, o ponto de interseção é $(0, -4)$.

b)
$y = 0 \Rightarrow x = -12$. Portanto, $A = (-12,0)$.
Então, a circunferência tem Centro = $(-6,0)$ e Raio = 6. Assim, a equação é $(x+6)^2 + y^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 + 12x + y^2 = 0$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 20

a)
Se as arestas medem a, qa e q^2a com $q > 1$, então o perímetro da menor face é $2(a + qa)$ e o da maior face é $2(qa + q^2a)$. Portanto, o quociente pedido é

$$\frac{2(qa+q^2a)}{2(a+qa)} = \frac{qa(1+q)}{a(1+q)} = q$$

b)
A área total da piscina é

$$2\left(a^2q + a^2q^2 + a^2q^3\right) = 2a^2q\left(1+q+q^2\right) = 4a^2\left(1+2+2^2\right) = 28a^2 = 252$$

Portanto, $a^2 = 252/(7\times 4) = 9 \Rightarrow a = 3\,\mathrm{m}$. ssim, as arestas medem 3,6 e 12m.

Logo, o volume da piscina é $V = a \times qa \times q^2a = (qa)^3 = (2\times 3)^3 = 216\,\mathrm{m}^3$

Questão 21

a)
Por divisão explícita,

$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -11x & +k+2 & x-1 \\
-x^2 & +x & & x-10 \\
 & -10x & +k+2 & \\
 & +10x & -10 & \\
 & & k-8 &
\end{array}.$$

Por Briot-Ruffini,

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & -11 & k+2 & 1 \\
\hline
1 & -10 & k-8 &
\end{array}$$

Pelo teorema do resto, $p(1) = 1 - 11 + k + 2 = k - 8 = resto$.

Assim, para que $k - 8 = 3 \Rightarrow k = 1$.

b)
Agora temos $p(x) = x^2 - 11x + 6$ e, pelas propriedades das raízes desse polinômio, $a + b = 11$ e $ab = 6$.
Por outro lado,

$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} = \frac{\pi\,(a+b)}{ab} = \frac{11\pi}{6} = \frac{12-1}{6}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

Assim, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}\right) = \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 22

a)
A soma das matrizes é:

$$A_\alpha + A_{2\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix}.$$

Sua multiplicação por ela mesma é:

$$(A_\alpha + A_{2\alpha})^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\frac{9}{2} & 6\alpha - 6\alpha \\ -\frac{3}{\alpha}+\frac{3}{\alpha} & -\frac{9}{2}+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

b)
O determinante da matriz é zero. Portanto, o sistema vai admitir solução se as duas equações forem dependentes, isto é,

$$\begin{cases} x+\alpha y & = -6 \\ -\frac{1}{\alpha}x - y & = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x+\alpha y & = -6 \\ -x-\alpha y & = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3.$$

Questão 23

a)
O volume do recipiente sem água é $\frac{1}{4}a^3$. Como o cubo gira em torno de uma aresta da base, podemos observar a superfície da seção do cubo. (Veja a figura.)
A área da região sem água deve ser a mesma nos dois casos. Então, $\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}z \times a \Rightarrow z = a/2$.

Portanto,

$$\tan\alpha = \frac{z}{a} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}.$$

b)
A $\tan\alpha = 1/4$, com $0 < \alpha < \pi/2$ corresponde a um triângulo retângulo de catetos 1 e 4, e, assim, de hipotenusa $\sqrt{17}$, de onde tiramos os valores de

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Temos, então, as identidades trigonométricas:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{16}{17} - \frac{1}{17} = \frac{15}{17}$$

e

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = 2 \times \frac{4}{17}$$

Portanto, a diferença é

$$\cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{15-8}{17} = \frac{7}{17}$$

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 24

a)
Precisamos conhecer o ângulo interno AÔB. Para tal, basta vislumbrar o triângulo AOS, de que se conhece um cateto, adjacente ao ângulo AÔS, que mede o raio da Terra, e a hipotenusa, que mede o dobro do raio da Terra.

Assim, $\cos A\hat{O}S = \frac{6.400}{2\times 6.400} = \frac{1}{2}$.

Portanto, $A\hat{O}S = 60^o \Rightarrow A\hat{O}B = 120^o = \frac{2}{3}\pi\ radianos$.

O comprimento do arco é, então, $\frac{2}{3}\pi \times 6.400\ km \approx 13.400\ km$.

b)
Pela Lei dos Cossenos, temos que

$$d^2 = [4 + 1 - 4 \times \cos(\theta)] \times 6.400^2\ km^2 = \left[4 + 1 - 4 \times \frac{3}{4}\right] \times 6.400^2\ km^2$$

$$= 2 \times 6.400^2\ km^2 \Rightarrow d = \sqrt{2} \times 6.400\ km \approx 9.000\ km$$