UNIRIO - Vestibular 2009

Solução da Prova Discursiva de Matemática

1ª Questão

Temos $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.

Como $\cos\theta = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$, segue-se que

$$A = \frac{v_0^2}{g} 2\sin\theta\cos\theta = \frac{100}{10} \cdot 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{1200}{169} m.$$

2ª Questão

Considere o complexo z_1 , cuja representação no plano de Gauss coincide com o vértice A do quadrado.

Temos $|z_1| = \overline{OA} = \frac{1}{2}\sqrt{4+4} = \sqrt{2}$ e o argumento de z_1 é 15° ,

portanto, a forma trigonométrica de z_1 é $z_1 = \sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$ e $z = z_1^4 = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \Rightarrow z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

3ª Questão

Sejam α e β as raízes da equação $x^2 + x + a = 0$.

Observe que $\alpha + \beta = -1$ e $\alpha\beta = a$, logo, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2a = 1 - 2a$ e $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-1}{a}$.

Temos $1 - 2a = \frac{-1}{a} \Rightarrow 2a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$ ou $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$, pois $a > 0$.

4ª Questão

Há três possibilidades para colocarmos o 1 na primeira linha do quadrado latino. Após a colocação do 1, há duas possibilidades para colocarmos o 2 na primeira linha e, na coluna em que o 1 foi colocado, há também 2 possibilidades para a colocação do 2. A partir daí ficam bem determinadas as posições dos outros 6 números no quadrado latino.

Pelo *Princípio Multiplicativo* o total de quadrados latinos é $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

5ª Questão

Como as moradias têm a mesma altura, a altura h do cone é igual ao raio r_2 da semi-esfera. Temos $\frac{\pi r_1^2 r_2}{3} = \frac{4\pi r_2^3}{6} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}$.

6ª Questão

A equação da reta $r \perp s$ é $y = -x + p$.

$D = (10, 2) \in r \Rightarrow 2 = -10 + c \Rightarrow c = 12$. Logo, a reta r tem equação $y = -x + 12$.

O ponto B pertence à interseção das retas r e s , assim, as suas coordenadas

são a solução do sistema $\begin{cases} y = x \\ y = -x + 12 \end{cases} \Rightarrow B = (6, 6)$.

O ponto C é ponto médio de $\overline{BD}$, assim, as coordenadas de C são

$$x_C = \frac{10+6}{2} = 8 \text{ e } y_C = \frac{2+6}{2} = 4 \text{ e .}$$

O raio r das circunferências satisfaz $4r = \overline{BD} = \sqrt{(10-6)^2 + (2-6)^2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$.

A abscissa do ponto A satisfaz $x_A = 6 - 2r \cos 45^\circ = 6 - 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$.

Como E é ponto médio de $\overline{AC}$, suas coordenadas são $x_E = \frac{8+4}{2} = 6$ e

$$y_E = \frac{4+4}{2} = 4, \text{ ou seja, } E = (6, 4).$$

7ª Questão

Seja B a matriz a matriz obtida da matriz A pela troca de todos os sinais da 1ª linha.

A inversa da matriz $X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ é a matriz $X^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\text{Logo, } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

8ª Questão

Temos $(2, 32 - x)1000000 = 600000 \Rightarrow x = 2, 32 - 0,6 = 1,72$.

Portanto, a empresa vendeu 1 dólar por R\$ 1,72.

9ª Questão

Observe que, na seqüência, há um 1, dois 2, três 3, quatro 4 e assim sucessivamente, nesta ordem. Portanto o inteiro k aparece pela primeira vez na seqüência como o termo $1 + 2 + \dots + (k-1) + 1 = \frac{(k-1)k}{2} + 1$.

Em particular, o primeiro 100 ocupa a posição $\frac{(99)100}{2} + 1 = 4951$.

10ª Questão

O raio r do círculo inscrito ao triângulo retângulo ABC de hipotenusa a e catetos b e c é dado por $r = p - a$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro.

Como $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, temos $4 = b + c - a = 5 + c - \sqrt{25 + c^2} \Rightarrow \sqrt{25 + c^2} = 1 + c \Rightarrow 25 + c^2 = 1 + 2c + c^2 \Rightarrow 2c = 24 \Rightarrow c = 12$.

Portanto, a área do triângulo retângulo ABC é $S = \frac{bc}{2} = \frac{60}{2} = 30$.