VESTIBULAR FGV 2011 1º semestre

Prova de Matemática Aplicada

Graduação
Módulo Discursivo - 24/10/10

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

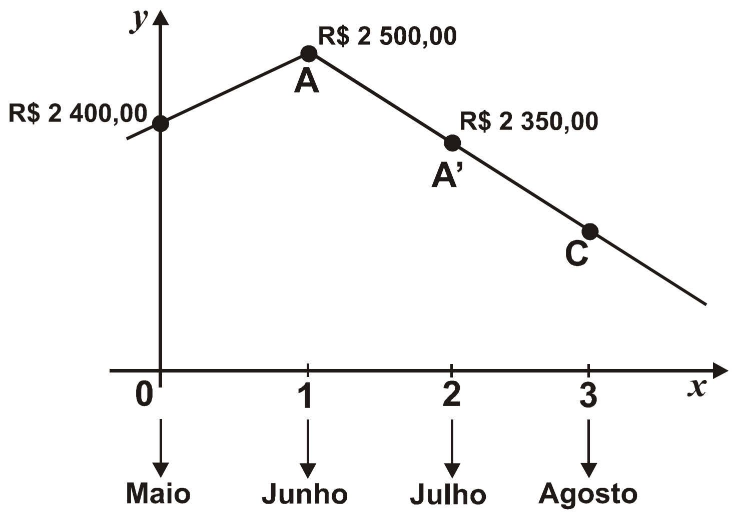
Instruções

Leia com atenção:

- Confira se o seu nome e RG estão corretos.
- A prova de matemática aplicada poderá ser escrita a lápis.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Não haverá substituição do Caderno de Questões.
- O candidato é responsável pela devolução deste Caderno de Questões ao fiscal de sala até o término do horário permitido; após esse limite, a prova será anulada.
- A duração total do Módulo Discursivo é de 4h.
- O candidato só poderá deixar definitivamente o local das provas a partir de duas horas após seu início.

• As questões das provas do Vestibular foram elaboradas conforme as novas regras do Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa, promulgado, no Brasil, pelo Decreto 6.583, em 29/09/2008. Nas respostas dos candidatos serão aceitos os dois Sistemas Ortográficos em vigor.

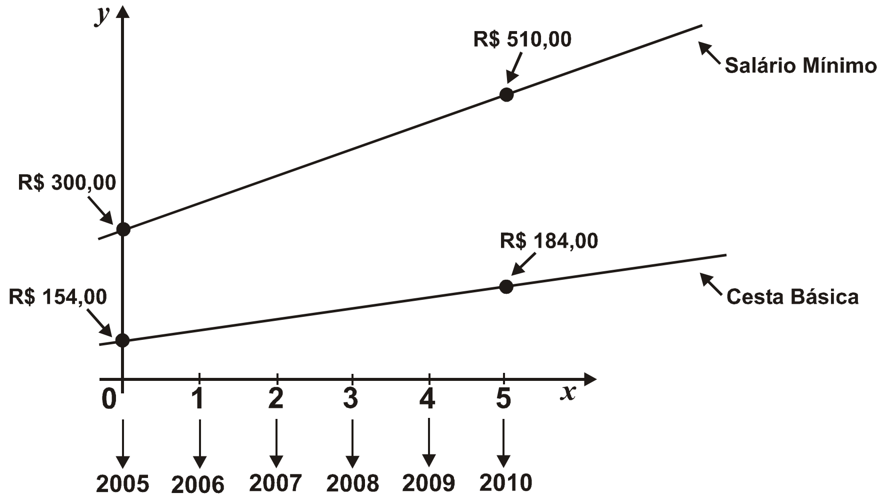
1 O gráfico no plano cartesiano expressa a alta dos preços médios de televisores de tela plana e alta definição, do modelo “LCD, full HD, 32 polegadas”, antes da Copa do Mundo na África do Sul e sua queda após o início. Os pontos A, A’ e C são colineares.
Demonstre que o preço médio desse modelo em agosto de 2010 foi 8,3 % menor, aproximadamente, que o preço médio do mesmo modelo em maio de 2010.



2 Nos últimos anos, o salário mínimo tem crescido mais rapidamente que o valor da cesta básica, contribuindo para o aumento do poder aquisitivo da população. O gráfico abaixo ilustra o crescimento do salário mínimo e do valor da cesta básica na região Nordeste, a partir de 2005.
Suponha que, a partir de 2005, as evoluções anuais dos valores do salário mínimo e dos preços da cesta básica, na região Nordeste, possam ser aproximados mediante funções polinomiais do 1º grau, $f(x) = ax + b$, em que *x* representa o número de anos transcorridos após 2005.

A Determine as funções que expressam os crescimentos anuais dos valores do salário mínimo e dos preços da cesta básica, na região Nordeste.

B Em que ano, aproximadamente, um salário mínimo poderá adquirir cerca de três cestas básicas, na região Nordeste? Dê a resposta aproximando o número de anos, após 2005, ao inteiro mais próximo.



3

A Por volta de 1650 a.C., o escriba Ahmes resolvia equações como $x + 0{,}5x = 30$, por meio de uma regra de três, que chamava de "regra do falso". Atribuía um valor falso à variável, por exemplo, $x = 10$, $10 + 0{,}5.10 = 15$ e montava a regra de três:

Valor falso	Valor verdadeiro
10	x
15	30

$$\frac{10}{15} = \frac{x}{30} \rightarrow x = 20$$

Resolva este problema do Papiro Ahmes pelo método acima:
"Uma quantidade, sua metade, seus dois terços, todos juntos somam 26. Qual é a quantidade?

B O matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1240), mais conhecido hoje como Fibonacci, propunha e resolvia, pela regra do falso, interessantes problemas como este:

"Um leão cai em um poço de 50 $\frac{1}{7}$ pés de profundidade. Pé é uma unidade de medida de comprimento. Ele sobe um sétimo de um pé durante o dia e cai um nono de um pé durante a noite. Quanto tempo levará para conseguir sair do poço?"
Resolva o problema pela regra do falso ou do modo que julgar mais conveniente. Observe que, quando o leão chegar a um sétimo de pé da boca do poço, no dia seguinte ele consegue sair.

4 Ao tentar encontrar a intersecção do gráfico de uma função quadrática com o eixo x, um aluno encontrou as soluções: $2+i$ e $2-i$. Quais são as coordenadas do vértice da parábola? Sabe-se que a curva intercepta o eixo y no ponto (0,5).

5 Considere três trabalhadores. O segundo e o terceiro, juntos, podem completar um trabalho em 10 dias. O primeiro e o terceiro, juntos, podem fazê-lo em 12 dias, enquanto o primeiro e o segundo, juntos, podem fazê-lo em 15 dias. Em quantos dias, os três juntos podem fazer o trabalho?

6

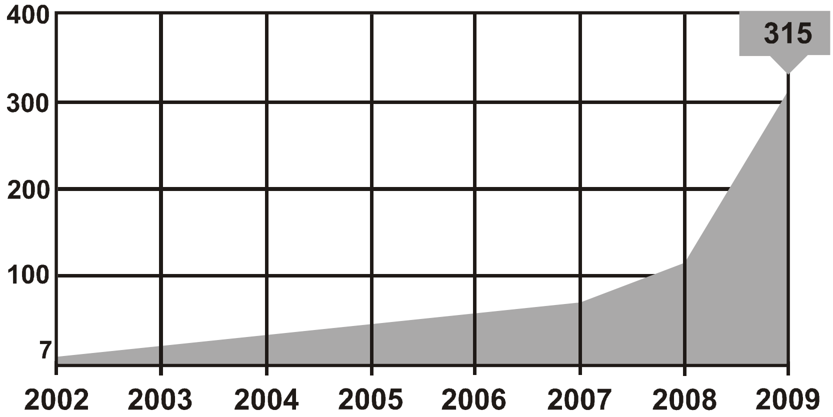
A Em um laboratório, uma caixa contém pequenas peças de mesma forma, tamanho e massa. As peças são numeradas, e seus números formam uma progressão aritmética:

5, 10, 15, ...,500

Se retirarmos ao acaso uma peça da caixa, qual é a probabilidade, expressa em porcentagem, de obtermos um número maior que 101?

B Explique por que podemos afirmar que 101! + 19 não é um número primo.

7 O serviço de compras via internet tem aumentado cada vez mais. O gráfico ilustra a venda anual de *e-books*, livros digitais, em milhões de dólares nos Estados Unidos.



Suponha que as vendas anuais em US$ milhões, possa ser estimada por uma função como $y = a.e^{kx}$, em que $x = 0$ representa o ano 2002, $x = 1$, o ano 2003, e assim por diante; e é o número de Euler.

Assim, por exemplo, em 2002 a venda foi de 7 milhões de dólares.
A partir de que ano a venda de livros digitais nos Estados Unidos vai superar 840 milhões de dólares?
Use as seguintes aproximações para estes logaritmos neperianos:
$\ln 2 = 0{,}7; \ln 3 = 1{,}1; \ln 5 = 1{,}6$

8

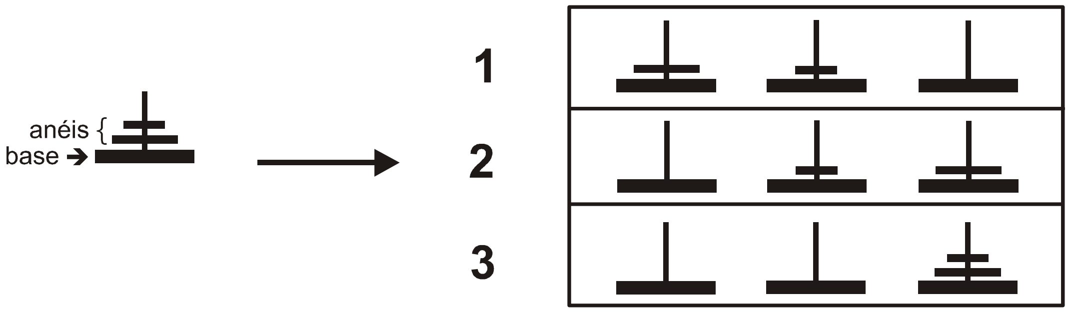
A Determine o quarto termo da sequência $(a_1, a_2, a_3, ...a_n...)$ dada por:

$a_n = 2a_{n-1} + 1$ e $a_1 = 1$, com $n > 1$.

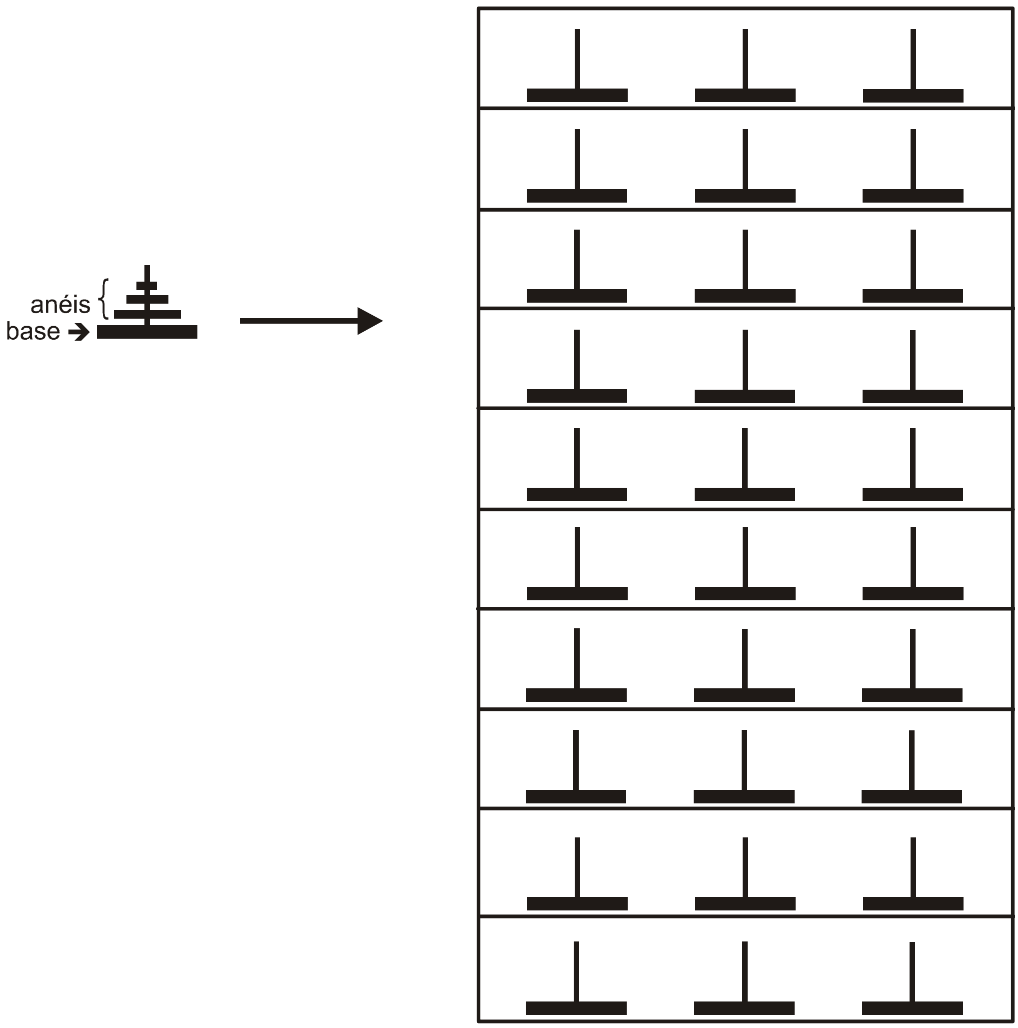
B O jogo "A torre de Hanói" tem sido jogado desde o século dezenove. É formado por três hastes de plástico, metal ou madeira, diversos anéis de tamanhos diferentes e consiste em transferir e reconstruir a torre em torno de uma das duas hastes vazias, mas seguindo as regras:

1ª Somente um anel pode ser movido de cada vez.
2ª Nenhum anel pode ficar sobre um anel menor.

Para uma torre com dois anéis, o menor número de movimentos necessários para transferi-la é 3.



Use o desenho abaixo e mostre como transferir uma torre de 3 anéis no menor número possível de movimentos.



C O menor número de movimentos a_n para transferir uma torre de n anéis, $n > 1$, satisfaz a relação: $a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$. Qual é o menor número de movimentos necessários para transferir uma torre com 6 anéis?

9

A Demonstre que as duas equações abaixo são identidades.

1ª $(x+y)^2 - 2xy = x^2 + y^2$

2ª $(x+y).[(x+y)^2 - 3xy] = x^3 + y^3$

B Um cavalheiro, tentando pôr à prova a inteligência de um aritmético muito falante, propôs-lhe o seguinte problema: “Eu tenho, em ambas as mãos, 8 moedas no total. Mas, se eu conto o que tenho em cada mão, os quadrados do que tenho em cada mão, os cubos do que tenho em cada mão, a soma disso tudo é o número 194. Quantas moedas tenho em cada mão?”
Mesmo que você resolva o problema por substituição e tentativa, faça o que é pedido no item **C**.

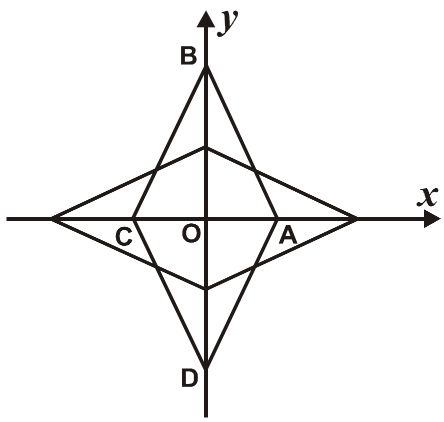
C Expresse o problema mediante um sistema de duas equações com duas variáveis.
Resolva o sistema de equações usando, se julgar conveniente, as identidades do item **A**.

10

A Calcule a área do losango ABCD cujos vértices são os afixos dos números complexos: 3, $6i$, -3 e $-6i$, respectivamente.

B Quais são as coordenadas dos vértices do losango A'B'C'D' que se obtém girando 90º o losango ABCD, em torno da origem do plano cartesiano, no sentido anti-horário?

C Por qual número devemos multiplicar o número complexo cujo afixo é o ponto B para obter o número complexo cujo afixo é o ponto B'?



Fim da Prova de Matemática Aplicada