



FUNDAÇÃO
GETÚLIO VARGAS

EESP
Escola de Economia
de São Paulo

ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

PROCESSO SELETIVO 2008/1.º SEMESTRE

CADERNO 1

Respostas da 2.ª Fase

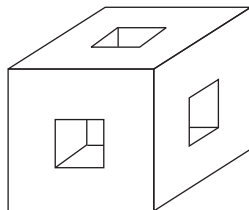
Raciocínio Matemático

RESOLUÇÃO

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

01. A figura mostra um cubo de aresta 3 m, no qual foram feitas perfurações da seguinte forma:

- os furos foram feitos a partir de quadrados de lado 1 m, atravessando-se paralelamente duas faces opostas do cubo;
- os quadrados que geraram os furos estão no centro das faces do cubo e possuem arestas paralelas às arestas do cubo.



Sabe-se que o sólido mostrado na figura é maciço e foi feito de uma liga, ao custo de R\$ 18,20 por m³.

- Calcule o custo da liga utilizada na fabricação do sólido, considerando-se somente o volume de liga que permaneceu no sólido final.
- Calcule o aumento percentual da área das paredes do sólido final (faces do sólido) com relação às paredes do cubo inicial que deu origem a ele.

RESPOSTA:

a) $V_1 = 3^3 \Rightarrow V_1 = 27 \text{ m}^3$

$$V_2 = V_1 - 3 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \Rightarrow V_2 = 27 - 9 + 2 \Rightarrow V_2 = 20 \text{ m}^3$$

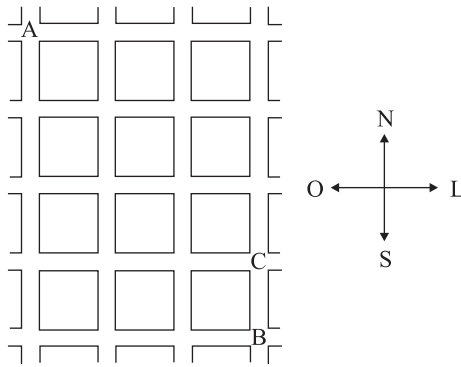
$$\text{Custo} = 18,2 \cdot 20 \Rightarrow \text{Custo} = \text{R\$ } 364,00$$

b) $A_1 = 3 \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow A_1 = 54 \text{ m}^2$

$$A_2 = A_1 - 6 + 24 \Rightarrow A_2 = 54 + 18 \Rightarrow A_2 = 72 \text{ m}^2$$

$$x = x = \frac{372 \cdot 100}{54} = 133,33\% \Rightarrow \text{aumento percentual de aproximadamente } 33,3\%$$

02. A figura indica uma parte do mapa das ruas de uma cidade. Nesse mapa, todas as ruas são paralelas ou perpendiculares, e os quarteirões são quadrados.



- a) Todas as manhãs João caminha, ao longo das ruas mostradas no mapa, do ponto A até o ponto B, sempre indo para o leste ou para o sul. Para variar o percurso, a cada cruzamento de duas ruas ele sorteia, com probabilidade $\frac{1}{2}$ (probabilidade independente de todas os outros sorteios), se vai para leste ou para o sul. Calcule a probabilidade de, em uma manhã qualquer, João passar pelo ponto C em seu percurso de A até B.
- b) Adote para este item:
- cada rua do mapa como sendo uma reta;
 - a origem dos eixos cartesianos ortogonais posicionada no ponto A, com Ox e Oy sobre as retas perpendiculares que passam por A;
 - a unidade linear de medida de cada quarteirão como sendo 1.

Duas linhas subterrâneas de esgoto devem ser construídas, uma delas ligando os pontos A e B, e a outra ligando C com a linha que liga A até B. Não havendo restrições no subsolo para a construção das linhas, determine suas equações cartesianas, levando em conta um projeto que minimize as distâncias das ligações indicadas.

RESPOSTA:

- a) O diagrama indica as respectivas probabilidades dos caminhos:

1	→	$\frac{1}{2}$	→	$\frac{1}{4}$	→	$\frac{1}{8}$
↓		↓		↓		↓
$\frac{1}{2}$	→	$\frac{1}{2}$	→	$\frac{3}{8}$	→	$\frac{5}{16}$
↓		↓		↓		↓
$\frac{1}{4}$	→	$\frac{3}{8}$	→	$\frac{3}{8}$	→	$\frac{1}{2}$
↓		↓		↓		↓
$\frac{1}{8}$	→	$\frac{1}{4}$	→	$\frac{5}{16}$	→	$\frac{21}{32}$
↓		↓		↓		↓
$\frac{1}{16}$	→	$\frac{3}{16}$	→	$\frac{11}{32}$	→	1

- b) AB:

$$m_{AB} = \frac{-4 - 0}{3 - 0} = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x \Rightarrow 4x + 3y = 0$$

CP ⊥ AB :

$$m_{CP} = \frac{3}{4}$$

$$-3 = 3 \cdot \frac{3}{4} + q \Rightarrow q = -\frac{21}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{21}{4} \Rightarrow 3x - 4y - 21 = 0$$

03. Na sequência não-decrescente de naturais ímpares

(1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5,...), cada número ímpar k aparece k vezes.

- a) Determine o 101.º termo dessa seqüência.
b) Determine a soma dos 1024 primeiros termos dessa seqüência.

$$\text{Dado: } \sum_{k=0}^m (2k+1)^2 = \frac{(m+1)(2m+1)(2m+3)}{3}$$

RESPOSTA:

- a) 1º termo: 1
4º termo: 3
9º termo: 5
16º termo: 7
⋮
⋮

$$n^2 = 100, n > 0 \rightarrow n = 10$$

Procuraremos o 10º termo da PA (1, 3, 5, ...), que será o 100º termo da seqüência do problema:

$$a_{10} = 1 + 9 \cdot 2 \Rightarrow a_{10} = 19$$

Se o 100º termo da seqüência do problema é 19, o 101º será 21, que é o próximo número ímpar.

- b) $n^2 = 1024, n > 0 \rightarrow n = 32$

PA (1, 3, 5, ..., a_{32})

$$a_{32} = 1 + 31 \cdot 2 = 63$$

Portanto, a soma que queremos calcular é $S = 1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + 63^2$

O número de termos dessa seqüência é igual ao número de termos da PA (1, 3, 5, ..., 63). Portanto:

$$63 = 1 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow n = 32$$

Sendo, $\sum_{n=0}^m (2k+1)^2 = \frac{(m+1)(2m+1)(2m+3)}{3}$, a soma S será igual a:

$$S = \sum_{n=0}^{31} (2k+1)^2 = \frac{(31+1)(62+1)(62+3)}{3} = 43680$$

04. Para cada número real x , admita que $\lfloor x \rfloor$ seja igual a x se x for inteiro, e igual ao maior inteiro menor do que x se x não for inteiro.

a) Calcule o valor de $\left\lfloor \frac{\lfloor -2,7 \rfloor}{\lfloor 0,7 \rfloor + \left\lfloor \frac{16}{3} \right\rfloor} \right\rfloor$.

b) Admita um serviço de entregas do correio cuja tarifa seja R\$ 0,09 por grama ou frações menores que 1 grama (por exemplo, paga-se R\$ 0,27 pelo envio de 2,3 g). Determine uma fórmula que utilize a notação $\lfloor x \rfloor$, sendo x a massa, em gramas, para a tarifa $T(x)$, em reais, de envio de uma mercadoria de x gramas por esse serviço de entregas do correio.

RESPOSTA:

a) $\left\lfloor \frac{-3}{0 + \lfloor 5,3 \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-3}{0 + 5} \right\rfloor = \lfloor -0,6 \rfloor = -1$

b) x : em gramas
 $T(x)$: em R\$

x	$T(x)$
$0 < x \leq 1$	0,09
$1 < x \leq 2$	0,18
$2 < x \leq 3$	0,27
...	...

Para compatibilizar os limites dos intervalos, usaremos:

x	$-x$	$\lfloor -x \rfloor$	$-0,09 \lfloor -x \rfloor$
$0 < x \leq 1$	$-1 \leq x < 0$	-1	0,09
$1 < x \leq 2$	$-2 \leq x < -1$	-2	0,18
$2 < x \leq 3$	$-3 \leq x < -2$	-3	0,27
...

Portanto, $T(x) = -0,09 \cdot \lfloor -x \rfloor$