01. Duas partículas *A* e *B*, de massa *m*, executam movimentos circulares uniformes sobre o plano xy (*x* e *y* representam eixos perpendiculares) com equações horárias dadas por $x_A(t) = 2a + a\cos(\omega t)$, $y_A(t) = a\text{sen}(\omega t)$ e $x_B(t) = -2a + a\cos(\omega t)$, $y_B(t) = a\text{sen}(\omega t)$, sendo ω e a constantes positivas.

A) Determine as coordenadas das posições iniciais, em $t = 0$, das partículas *A* e *B*.
B) Determine as coordenadas do centro de massa do sistema formado pelas partículas *A* e *B* no instante $t = 0$.
C) Determine as coordenadas do centro de massa do sistema formado pelas partículas *A* e *B* em um instante qualquer t.
D) Mostre que a trajetória do centro de massa é uma circunferência de raio a, com centro no ponto ($x = 0$, $y = 0$).

Solução

A) No instante inicial, as coordenadas das posições iniciais das partículas *A* e *B* são:

$x_A(0) = 2a + a\cos(\omega\times 0) = 3a$; $y_A(0) = a\text{sen}(\omega\times 0) = 0$,

$x_B(0) = -2a + a\cos(\omega\times 0) = -a$; $y_B(0) = a\text{sen}(\omega\times 0) = 0$.

B) As coordenadas do centro de massa são dadas por

$$x_{CM}(t) = \left(mx_A(t) + mx_B(t)\right)/(m+m) = \left(x_A(t) + x_B(t)\right)/2$$

e

$$y_{CM}(t) = \left(my_A(t) + my_B(t)\right)/(m+m) = \left(y_A(t) + y_B(t)\right)/2.$$

No instante $t = 0$, tem-se:

$$x_{CM}(0) = \left(mx_A(0) + mx_B(0)\right)/(m+m) = \left(3a + (-a)\right)/2 = a$$

e

$$y_{CM}(0) = \left(my_A(0) + my_B(0)\right)/(m+m) = (0+0)/2 = 0.$$

C) Substituindo-se as expressões dadas para $x_A(t)$, $x_B(t)$, $y_A(t)$ e $y_B(t)$ nas expressões acima, obtemos:

$$x_{CM}(t) = \left(2a + a\cos(\omega t) - 2a + a\cos(\omega t)\right)/2 = a\cos(\omega t)$$

e

$$y_{CM}(t) = \left(a\text{sen}(\omega t) + a\text{sen}(\omega t)\right)/2 = a\text{sen}(\omega t).$$

D) Somando-se os quadrados de $x_{CM}(t)$ e de $y_{CM}(t)$,

obtemos $x_{CM}^2(t) + y_{CM}^2(t) = a^2\cos^2(\omega t) + a^2\text{sen}^2(\omega t) = a^2\left(\text{sen}^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right) = a^2$.

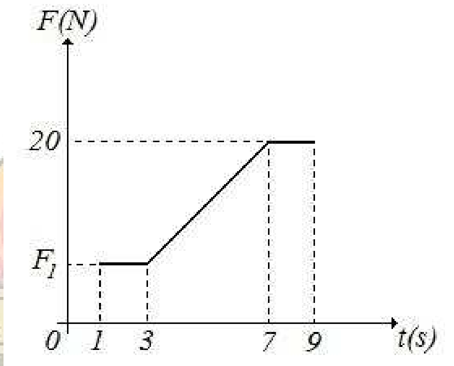
A equação $x_{CM}^2 + y_{CM}^2 = a^2$ é a equação de uma circunferência de raio a com centro em ($x = 0$, $y = 0$), que é a trajetória do centro de massa.

Pontuação: o item **A** vale dois pontos; o item **B** vale dois pontos; o item **C** vale dois pontos; o item **D** vale quatro pontos.

02. A única força horizontal (ao longo do eixo *x*) que atua em uma partícula de massa m = 2 kg é descrita, em um dado intervalo de tempo, pelo gráfico abaixo. A partícula está sujeita a um campo gravitacional uniforme cuja aceleração é constante, apontando para baixo ao longo da vertical, de módulo g = 10 m/s^2. Despreze quaisquer efeitos de atrito.

A) Determine o módulo da força resultante sobre a partícula entre os instantes t_1 = 1 s e t_2 = 3 s, sabendo que o impulso ao longo da direção horizontal foi de 30 N·s no referido intervalo de tempo.

B) Determine a variação da quantidade de movimento da partícula, na direção horizontal, entre os instantes t_2 = 3 s e t_3 = 7 s.



Solução

A) No intervalo de tempo entre os instantes t_1 = 1 s e t_2 = 3 s, o impulso ao longo do eixo *x* é I = 30 N·s. Logo, a força resultante ao longo da direção *x* é:

$$I = F_1(t_2 - t_1) \Rightarrow F_1 = I/(t_2 - t_1) = 30/2 \Rightarrow F_1 = 15N \quad . \qquad (1)$$

Outra força que age na partícula no referido intervalo de tempo é a força peso $P = mg = 2\,kg \cdot 10\,m/s^2 = 20\,N$. Logo, a força resultante total entre os instantes t_1 = 1 s e t_2 = 3 s é:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + P^2} = \sqrt{225 + 400} \Rightarrow F_R = 25\,N. \qquad (2)$$

B) A variação da quantidade de movimento entre os instantes t_2=*3* s e t_3=*7* s é igual ao impulso, que é numericamente igual à área sob a curva $F \times t$ no referido intervalo de tempo. Logo,

$$\Delta Q = I = \frac{(F_1 + F_2)(t_3 - t_2)}{2} = \frac{(15 + 20)4}{2} \Rightarrow \Delta Q = 70\,N \cdot s.$$

Pontuação: o item **A** vale até cinco pontos; o item **B** vale cinco pontos.

03. Uma barra cilíndrica reta metálica, homogênea, de comprimento L, com seção transversal A, isolada lateralmente a fim de evitar perda de calor para o ambiente, tem suas duas extremidades mantidas a temperaturas T_1 e T_2, $T_1 > T_2$. Considere que o regime estacionário tenha sido atingido.

A) Escreva a expressão do fluxo de calor por condução, sabendo-se que esse fluxo é proporcional à área da seção transversal e à diferença de temperatura entre os extremos da região de interesse ao longo da direção do fluxo e inversamente proporcional à distância entre tais extremos.

B) Determine a temperatura de um ponto da barra localizado a uma distância $L/3$ da extremidade de maior temperatura em função de T_1 e T_2.

Solução

A) No regime estacionário, o fluxo através da barra é dado por

$\Phi = KA(T_1 - T_2)/L$,

onde K é uma constante de proporcionalidade, denominada coeficiente de condutibilidade térmica.

B) O fluxo entre as extremidades da barra se mantém constante ao longo de sua extensão. Logo,

$\Phi = KA(T_1 - T_2)/L = KA(T_1 - T)/(L/3)$,

de onde se obtém $T = (2T_1 + T_2)/3$, sendo esta a temperatura a uma distância $L/3$ da extremidade da barra que se encontra mantida a uma temperatura T_1.

Pontuação: o item **A** vale quatro pontos; o item **B** vale seis pontos.

04. Uma fonte fixa emite uma onda sonora de freqüência f. Uma pessoa se move em direção à fonte sonora com velocidade v_1 e percebe a onda sonora com freqüência f_1. Se essa mesma pessoa se afastasse da fonte com velocidade v_2, perceberia a onda sonora com freqüência f_2. Considerando a velocidade do som no ar, v_s = 340 m/s, e $v_1 = v_2$ = 20 m/s, determine a razão f_1/f_2.

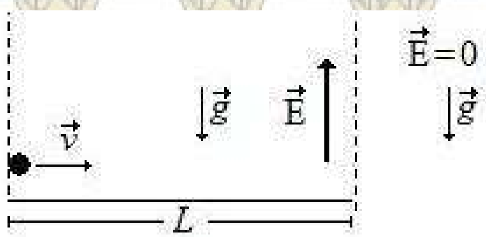
Solução

Considere-se a velocidade positiva quando a pessoa se aproxima da fonte sonora fixa e negativa quando se afasta. Assim, para as duas situações descritas, podemos escrever $f/v_s = f_1/(v_s + v_1)$ e $f/v_s = f_2/(v_s - v_2)$. Dessas duas equações, obtém-se $f_1/f_2 = (v_s + v_1)/(v_s - v_2)$.

Substituindo-se v_s = 340 m/s e $v_1 = v_2$ = 20 m/s, obtém-se $f_1/f_2 = 9/8$.

Pontuação: a questão vale até dez pontos.

05. Uma partícula de massa m e carga positiva q, com velocidade horizontal $\vec{v}$ (módulo v), penetra numa região de comprimento L (paralelo à velocidade inicial da partícula), na qual existe um campo elétrico vertical $\vec{E}$ (constante), conforme a figura abaixo. A aceleração da gravidade local é $\vec{g}$ (de módulo g, direção vertical e sentido para baixo). Na região onde o campo elétrico é não-nulo (entre as linhas verticais tracejadas na figura abaixo), a força elétrica tem módulo maior que a força peso. Determine o módulo do campo elétrico para o qual a partícula apresenta o máximo alcance ao longo da linha horizontal localizada na altura em que ela deixa a região do campo elétrico. Despreze quaisquer efeitos de dissipação de energia (resistência do ar, atrito etc.).



Solução

Para que a partícula tenha o máximo alcance, como requerido na questão, a velocidade adquirida na vertical, no instante em a partícula deixa a região do campo elétrico, deve ser igual, em módulo, à velocidade inicial da partícula na direção horizontal, que é sempre constante (pela ausência de forças naquela direção). Nesse caso, após deixar a região do campo elétrico, a partícula é lançada obliquamente, num ângulo de 45^0 em relação à horizontal. Essa é a condição de máximo alcance ao longo da linha horizontal que passa no ponto onde a partícula deixa a região de campo elétrico não-nulo.

O tempo no qual a partícula percorre a região do campo elétrico é:

$$t = \frac{L}{v}\,. \qquad (1)$$

Neste intervalo de tempo, a velocidade na direção y alcança o valor v. A aceleração ao longo da direção y (vertical) é:

$$\underbrace{v_y}_{=v} = \underbrace{v_{oy}}_{=0} + a_y \underbrace{t}_{=\frac{L}{v}} \;\Rightarrow\; a_y = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{L}\,. \qquad (2)$$

A força resultante sobre a partícula na região do campo elétrico encontra-se ao longo da direção y, sendo igual à diferença entre a força elétrica e a força peso. Logo,

$$F_R = qE - mg = ma_y \;\Rightarrow\; E = \frac{m}{q}\left(a_y + g\right) \;\Rightarrow\; E = \frac{m}{q}\left(\frac{v^2}{L} + g\right),$$

que é o valor do campo necessário para que a partícula tenha o máximo alcance ao longo da horizontal localizada na altura em que ela deixa a região do campo elétrico.

Pontuação: a questão vale até dez pontos.

06. Dois capacitores desconhecidos são ligados em série a uma bateria de força eletromotriz ε, de modo que a carga final de cada capacitor é q. Quando os mesmos capacitores são ligados em paralelo à mesma bateria, a carga total final da associação é $4q$. Determine as capacitâncias dos capacitores desconhecidos.

Solução

Os capacitores desconhecidos serão aqui nomeados como C_1 e C_2.

Quando os capacitores estão conectados em série à bateria, obtém-se:

$$\frac{q}{\varepsilon} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,. \qquad (1)$$

No caso da ligação em paralelo, obtém-se:

$$\frac{4q}{\varepsilon} = \left(C_1 + C_2\right)\,. \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), encontra-se:

$$C_1 = \frac{4q^2}{\varepsilon^2 C_2}\,. \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (2), encontra-se, após alguma manipulação algébrica:

$$C_2^2 - \frac{4q}{\varepsilon}C_2 + \frac{4q^2}{\varepsilon^2} = \left(C_2 - \frac{2q}{\varepsilon}\right)^2 = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = \frac{2q}{\varepsilon}. \qquad (4)$$

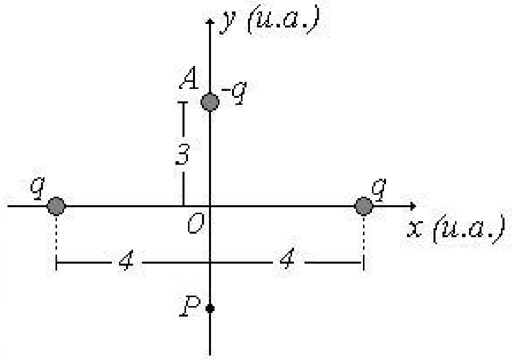
Substituindo (4) em (3), encontra-se:

$$C_1 = \frac{2q}{\varepsilon}. \qquad (5)$$

Logo, as capacitâncias desconhecidas são dadas pelas equações (4) e (5).

Pontuação: a questão vale até dez pontos.

07. Na figura abaixo, é mostrada uma distribuição de três partículas carregadas (duas com carga positiva e uma com carga negativa) localizadas ao longo dos eixos perpendiculares de um dado sistema de referência. Todas as distâncias estão em unidades arbitrárias (*u.a.*). As cargas positivas, ambas iguais a q, estão fixas nas coordenadas (x,y), iguais a (4,0) e (– 4,0). A carga negativa, igual a – q, está localizada, inicialmente em repouso, no ponto A, cujas coordenadas são (0,3). A aceleração da gravidade local é constante (módulo g) e aponta no sentido negativo do eixo y do sistema de referência, que está na vertical. Todas as partículas possuem a mesma massa m. A constante eletrostática no meio em que as partículas carregadas estão imersas é K.



Determine o módulo da velocidade com que a partícula com carga negativa chega ao ponto P, localizado pelas coordenadas $(x,y) = (0,–3)$.

Solução
O problema envolve o conceito da conservação de energia. Assumimos aqui que o zero de energia potencial elétrica encontra-se no infinito e que o zero de energia potencial gravitacional encontra-se no eixo y = 0. A energia mecânica da partícula com carga – q, na posição inicial, é igual à energia no ponto P. Logo,

$$E_A = E_P \quad \Rightarrow \quad 3mg - 2\left(\frac{Kq^2}{5}\right) = \frac{1}{2}mv^2 - 2\left(\frac{Kq^2}{5}\right) - 3mg$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{12g} \ .$$

Pontuação: a questão vale até dez pontos.

08. N recipientes, n_1, n_2, n_3 ..., n_N, contêm, respectivamente, massas m a uma temperatura T, $m/2$ a uma temperatura $T/2$, $m/4$ a uma temperatura $T/4$, ..., $m/2^{N-1}$ a uma temperatura $T/2^{N-1}$, de um mesmo líquido. Os líquidos dos N recipientes são misturados, sem que haja perda de calor, atingindo uma temperatura final de equilíbrio T_f.

A) Determine T_f, em função do número de recipientes N.

B) Determine T_f, se o número de recipientes for infinito.

Solução

A) Quando misturamos uma massa m_1 de um líquido de calor específico c, que se encontra a uma temperatura T_1, com uma massa m_2 do mesmo líquido, que se encontra a uma temperatura T_2, as duas massas trocam calor até que o equilíbrio térmico seja atingido. Isso implica $m_1c(T_{12}-T_1)+m_2c(T_{12}-T_2)=0$, de onde tiramos a temperatura de equilíbrio $T_{12}=(m_1T_1+m_2T_2)/(m_1+m_2)$. Se misturarmos a esse líquido de massa m_1+m_2, que está a uma temperatura T_{12}, uma massa m_3 do mesmo líquido a uma temperatura T_3, podemos seguir o cálculo acima para encontrarmos

$$T_{123}=((m_1+m_2)T_{12}+m_3T_3)/(m_1+m_2+m_3)=(m_1T_1+m_2T_2+m_3T_3)/(m_1+m_2+m_3)$$

Esse procedimento pode ser estendido até termos misturado os líquidos de todos os N recipientes. Obteremos para a temperatura final de equilíbrio

$T_f=(m_1T_1+m_2T_2+...+m_NT_N)/(m_1+m_2+...+m_N)$.

Substituindo-se $m_1 = m$, $m_2 = m/2$, ..., $m_N = m/2^{N-1}$, $T_1 = T$, $T_2 = T/2$, ..., $T_N = T/2^{N-1}$, encontramos $T_f = mT\left(1+1/4+1/16+...+1/2^{2N-2}\right)/\left[m\left(1+1/2+1/4+...+1/2^{N-1}\right)\right]$.

No numerador aparece uma progressão geométrica com N termos (sendo o primeiro termo igual a 1) e de razão $1/4$; no denominador também aparece uma progressão geométrica com N termos (sendo o primeiro termo igual a 1) e de razão $1/2$. Sabemos que a soma dos termos de uma progressão geométrica com N termos (o primeiro termo sendo a_1) e de razão q é dada por $S=a_1\left(q^{N-1}-1\right)/(q-1)$. Utilizando essa expressão para obter as somas que aparecem na expressão para T_f, obtemos $T_f = 2\mathrm{T}\left(1-1/2^{2N-2}\right)/\left[3\left(1-1/2^{N-1}\right)\right]$.

B) Se o número de recipientes for infinito, a expressão para T_f é

$T_f = mT\left(1+1/4+1/16+...\right)/\left[m\left(1+1/2+1/4+...\right)\right]$.

A soma dos termos de uma progressão geométrica infinita com primeiro termo a_1 e razão q $(0<q<1)$ é $S=a_1/(1-q)$. Utilizando esse resultado para calcularmos as somas que aparecem na expressão acima para T_f, obtemos $T_f = 2\mathrm{T}/3$.

Pontuação: o item **A** vale até cinco pontos; o item **B** vale cinco pontos.