01. Um losango do plano cartesiano oxy tem vértices A(0,0), B(3,0), C(4,3) e D(1,3).

A) Determine a equação da reta que contém a diagonal *AC*.

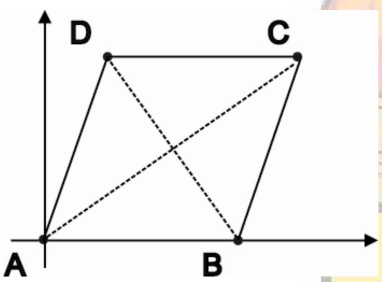
B) Determine a equação da reta que contém a diagonal *BD*.

C) Encontre as coordenadas do ponto de interseção das diagonais *AC* e *BD*.

Questão 01

Tópico: 3.3. Geometria analítica plana.

Solução



A) (até três pontos)

Utilizando o procedimento usual, temos que

$$\frac{y-0}{x-0}=\frac{3-0}{4-0}.$$

Daí segue que a equação pedida é $3x-4y=0$.

B) (até três pontos)

Da mesma forma, $\frac{y-0}{x-3}=\frac{3-0}{1-3}$ implica que $3x+2y=9$.

C) (até quatro pontos)

As coordenadas do ponto de interseção, $M(a,b)$, devem satisfazer as equações das retas encontradas. Sendo assim, precisamos resolver o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3a - 4b = 0 \\ 3a + 2b = 9 \end{cases}$$

A aplicação correta de qualquer método nos leva aos valores $a=2$ e $b=\frac{3}{2}$.

02. Considere as seguintes regiões do plano cartesiano *xoy*:

$A = \{\, P(x,y);\ x^2+y^2-4x-4y+4\le 0 \,\}$ e $B = \{\, P(x,y);\ 0\le y\le x\le 4 \,\}$.

A) Identifique e esboce graficamente a região *A*.

B) Identifique e esboce graficamente a região *B*.

C) Calcule a área da região $A\cap B$.

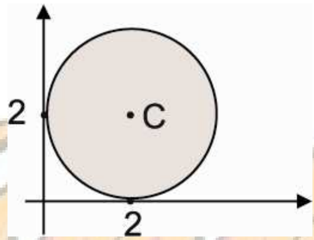
Questão 02

Tópico: III. Geometria.

Solução

A) (até três pontos)

Pelo método de completar quadrados, verificamos que a sentença que define a região A é equivalente à sentença $(x-2)^2+(y-2)^2 \leq 2^2$, ou seja, A é um círculo de raio $r=2$ e centro $C(2,2)$.

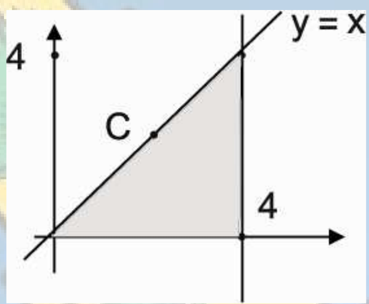


B) (até três pontos)

A região B é a interseção de três semi-planos, quais sejam,

$$\{P(x,y);\ \ 0 \leq y\} \cap \{P(x,y);\ \ y \leq x\} \cap \{P(x,y);\ \ x \leq 4\}.$$

Portanto, B é a região limitada pelo triângulo retângulo esboçado a seguir.



C) (até quatro pontos)

Como o centro do círculo é o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo B e seu raio mede 2, a região $A \cap B$ é um semi-círculo de raio 2. Logo, a sua área é igual a 2π.

03. Considere o número real $3^{\sqrt{4,1}}$.

A) Mostre que $3^{\sqrt{4,1}} > 9$.

B) Mostre que $3^{\sqrt{4,1}} < 10$. Sugestão: $\log_{10} 3 < 0,48$ e $\sqrt{4,1} < 2,03$.

Questão 03

Tópico: 2.2. Números reais; 4.3 Funções logarítmicas e exponenciais.

Solução

A) (até três pontos)

A função exponencial $f : R \to (0,+\infty)$, $f(x) = 3^x$, é crescente, pois a base é maior que 1. Pela definição de função crescente, vale a implicação a seguir:

$$2 < \sqrt{4,1} \ \Rightarrow 9 = f(2) < f\left(\sqrt{4,1}\right) = 3^{\sqrt{4,1}} \Rightarrow 9 < 3^{\sqrt{4,1}}.$$

B) (até sete pontos)
Observe a desigualdade

$$\log_{10} 3^{\sqrt{4,1}} = \sqrt{4,1}\log_{10} 3 < 0,48 \cdot 2,03 = 0,9744 < 1 \Rightarrow \log_{10} 3^{\sqrt{4,1}} < 1 = \log_{10} 10 .$$

Como a função logarítmica $g(x) = log_{10}\, x$ é crescente, $3^{\sqrt{4,1}} < 10$.

04. Os números complexos distintos z e w são tais que $z + w = 1$ e $z \cdot w = 1$.

A) Calcule $|z|$.

B) Calcule o valor $z^4 + w^4$ sabendo-se que z está no primeiro quadrante do plano complexo.

Questão 04
Tópico: 2.3. Números complexos.
Solução
A) (até quatro pontos)

A segunda identidade garante que $z \neq 0$, informação que nos permite escrever $w = \dfrac{1}{z}$. Substituindo esse valor na primeira identidade, após manipulações algébricas simples, obtemos $z^2 - z + 1 = 0$. Os dois valores possíveis para z são $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$ ou $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$. Independentemente de qual seja o valor, o seu módulo é 1, pois

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 .$$

B) (até seis pontos)

Nesse caso, temos $z = \cos\dfrac{\pi}{3} + isen\dfrac{\pi}{3}$ e, pelo fato de o módulo de z ser 1, a segunda identidade garante que w é o conjugado de z, isto é, $w = \cos\dfrac{\pi}{3} - isen\dfrac{\pi}{3} = \bar{z}$. Verifiquemos essa afirmação:

$$w = w \cdot 1 = w \cdot z \cdot \bar{z} = 1 \cdot \bar{z} = \bar{z} .$$

Pela fórmula de De Moivre e pelas propriedades da conjugação, valem as igualdades a seguir:

$$z^4 + w^4 = z^4 + \bar{z}^4 = \cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} - isen\frac{4\pi}{3} = 2\cos\frac{4\pi}{3} = -1 .$$

05. Considere as funções $f : R \rightarrow R$ e $g : R \rightarrow R$ definidas, respectivamente, por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = cos(x) - sen(x)$.

A) Explicite a função composta $h(x) = f(g(x))$.

B) Determine o valor máximo da função composta $h(x) = f(g(x))$.

Questão 05

Tópico: IV. Análise de funções.

Solução

A) (até três pontos)

Aplicando a definição de função composta, temos que

$$\mathrm{h(x) = (cos(x) - sen(x))^2 + 1 = cos^2(x) + sen^2(x) - 2cos(x)sen(x) + 1 = 2 - sen(2x)}.$$

B) (até sete pontos)

Recordando que $-1 \leq sen(2x) \leq 1$, temos que o maior valor da função $h(x) = 2 - sen(2x)$ é 3, que é obtido quando $sen(2x) = -1$.

06. A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ tem razão $q = \frac{1}{2}$ e $a_1 = 1$. Determine o menor inteiro positivo n tal que S_n, a soma dos n primeiros termos da progressão, satisfaz a desigualdade $S_n > \frac{8191}{4096}$.

Questão 06

Tópico: 4.1. Seqüências numéricas.

Solução

(até dez pontos)

Observamos que a fatoração por primos do denominador da fração dada é $4096 = 2^{12}$ e que o numerador está relacionado com o denominador pela igualdade

$$8191 = 2 \cdot 2^{12} - 1 = 2^{13} - 1.$$

Por outro lado, a soma dos n primeiros termos da progressão vale

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}.$$

Esses comentários reduzem a solução ao estudo da desigualdade

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} > \frac{2^{13} - 1}{2^{12}} = S_{13},$$

ou seja, devemos examinar quando a desigualdade $S_n - S_{13} > 0$ ocorre pela primeira vez. Obviamente, a diferença é positiva se, e somente se, $n > 13$, pois $S_n = S_{n-1} + a_n$ e $a_n > 0$. Então, o menor natural que satisfaz a condição pedida é $n = 14$.

07. Seja C um cubo com medida de aresta igual a $100\ (uc)$.

A) Calcule o volume da esfera S inscrita no cubo C.

B) Secciona-se C em mil cubos congruentes, C_1, C_2, ..., C_{1000}, e inscreve-se uma esfera S_k em cada cubo C_k, k = 1, ..., 1000. Calcule a soma dos volumes das esferas S_k, k = 1, ..., 1000.

Questão 07

Tópico: 3.2. Geometria euclidiana espacial.

Solução

A) (até três pontos)

Como S está inscrita no cubo, o raio mede a metade da aresta. Sendo assim, o volume é $vol(S) = \frac{4}{3}\pi 50^3$.

B) (até sete pontos)

Como os cubos menores são congruentes, suas arestas são congruentes e, portanto, os volumes são iguais. Mais ainda, eles foram obtidos ao seccionarmos C; logo, a soma de todos os volumes dos cubos menores é igual ao volume do cubo C:

$$vol(C) = \sum_{k=1}^{1000} vol(C_k) = 1000\ vol(C_1).$$

Se a é a medida das arestas do cubo C_1, a expressão acima nos dá a igualdade $10^6 = 1000\ a^3$, de onde segue o valor $a = 10$.

As esferas inscritas nos cubos menores têm raios $r = \frac{a}{2} = 5$. Por isso, os volumes de todas as esferas inscritas nos pequenos cubos são iguais. Calculemos a soma desses volumes:

$$\sum_{k=1}^{1000} vol(S_k) = 1000\ vol(S_1) = 1000\frac{4}{3}\pi\ 5^3 = \frac{4}{3}\pi\ 50^3.$$

08. Uma comissão de 5 membros será formada escolhendo-se parlamentares de um conjunto com 5 senadores e 3 deputados. Determine o número de comissões distintas que podem ser formadas obedecendo à regra: a presidência da comissão deve ser ocupada por um senador, e a vice-presidência, por um deputado (duas comissões com as mesmas pessoas, mas que a presidência ou a vice-presidência sejam ocupadas por pessoas diferentes, são consideradas distintas).

Questão 08

Tópico: 2.6. Análise combinatória.

Solução

(até dez pontos)

Escolha da presidência:	1 escolha em 5 possíveis.
Escolha da vice-presidência:	1 escolha em 3 possíveis.
Escolha dos outros membros:	3 escolhas em 6 possíveis.

Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, o número de comissões distintas é igual a

$$C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^3 = 5 \cdot 3 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 300.$$