01. Considere a expressão $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$. Pede-se:

A) encontrar o valor numérico da expressão para $x = -2$.

B) obter todas as raízes complexas do polinômio $p(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$.

Questão 01
Comentários: A questão explora conhecimentos sobre aritmética, álgebra elementar, números complexos e polinômios.

A) A substituição direta fornece

$$(-2)^4 - (-2)^3 - 5(-2)^2 - (-2) - 6 = 16 - (-8) - 5\cdot 4 + 2 - 6$$
$$= 16 + 8 - 20 + 2 - 6 = 0.$$

B) Pelo item A), uma das raízes de $p(x)$ é -2. Portanto $p(x)$ é divisível por $x - (-2) = x + 2$, e, efetuando tal divisão, obtemos

$$p(x) = (x + 2)(x^3 - 3x^2 + x - 3).$$

A partir disso, há duas abordagens possíveis.

i. Observando que

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + x - 3 &= (x^3 + x) - (3x^2 + 3) \\ &= x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x - 3), \end{aligned}$$

concluímos que as demais raízes de $p(x)$ são as raízes complexas dos polinômios $x^2 + 1$ ou $x - 3$, isto é, são $\pm\ i$ e 3.

ii. Aplicando o critério de pesquisa de raízes racionais ao polinômio $q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$, concluímos que suas possíveis raízes racionais são da forma $\frac{a}{b}$, em que a e b são inteiros tais que a é divisor de 3 e b é divisor de 1. Portanto, as possíveis raízes racionais de $q(x)$ são -3, -1, 1 ou 3. Testando tais possibilidades, concluímos que 3 é raiz de q e então obtemos
$q(x) = (x^2 + 1)(x - 3)$.
O resto se dá como em (i).

Pontuação: O item A vale até dois pontos; o item B vale até oito pontos.

02. Os números reais a, b e y são tais que $a \neq 0$ e $a \cos y \neq b \operatorname{sen} y$. Se $tg\, x = \dfrac{a \operatorname{sen} y + b \cos y}{a \cos y - b \operatorname{sen} y}$, calcule o valor de $tg(x - y)$ em função de a e b somente.

Questão 02
Comentários: A questão explora conhecimentos sobre trigonometria.
Solução 1. Note inicialmente que

$$tg\,x\; tg\,y = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{a \operatorname{sen} y + b \cos y}{a \cos y - b \operatorname{sen} y}\right)\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = -1$$
$$\Leftrightarrow (a \operatorname{sen} y + b\cos y)\operatorname{sen} y = -(a \cos y - b \operatorname{sen} y)\cos y$$
$$\Leftrightarrow a \operatorname{sen}^2 y = -a \cos^2 y \Leftrightarrow a = 0,$$

o que não ocorre. Portanto, podemos aplicar a fórmula de adição $tg(x - y) = \dfrac{tg\,x - tg\,y}{1 + tg\,x . tg\,y}$.
Substituindo a expressão para $tg\,x$ na mesma fórmula, obtemos sucessivamente

$$tg(x-y)=\frac{tg\,x-tg\,y}{1+tg\,x.tg\,y}=\frac{\dfrac{a\,sen\,y+b\cos y}{a\cos y-b\,sen\,y}-tg\,y}{1+\left(\dfrac{a\,sen\,y+b\cos y}{a\cos y-b\,sen\,y}\right)tg\,y}$$

$$=\frac{(a\,sen\,y+b\cos y)\cos y-(a\cos y-b\,sen\,y)\,sen\,y}{(a\cos y-b\,sen\,y)\cos y+(a\,sen\,y+b\cos y)\,sen\,y}=\frac{b\cos^2 y+b\,sen}{a\cos^2 y+a\,sen}$$

Solução 2. Denote $c = \sqrt{a^2+b^2}$, e seja $\Theta\in[0,2\pi)$ o arco trigonométrico tal que $\cos\Theta=\frac{a}{c}$ e $sen\,\Theta=\frac{b}{c}$. Então, $a=c\cos\Theta$ e $b=c\,sen\,\Theta$, donde segue que

$$tg\,x=\frac{c\cos\Theta\,sen\,y+c\,sen\,\Theta\cos y}{c\cos\Theta\cos y-c\,sen\,\Theta\,sen\,y}=\frac{sen(\Theta+y)}{\cos(\Theta+y)}=tg(\Theta+y).$$

Logo, existe um inteiro k tal que $x-(\Theta+y)=k\pi$, ou ainda $x-y=\Theta+k\pi$, e segue daí que

$$tg(x-y) = tg(\Theta+k\pi)=tg\,\Theta=\frac{b}{a}.$$

Pontuação: Até dez pontos.

03. Calcule o menor valor inteiro de n tal que $2^n > 5^{20}$, sabendo que $0{,}3 < \log_{10}2 < 0{,}302$.

Questão 03
Comentários: A questão aborda conhecimentos sobre logaritmos.

Tomando logaritmos decimais em ambos os membros da desigualdade desejada, obtemos

$$2^n > 5^{20} \Leftrightarrow \log_{10}2^n > \log_{10}5^{20} \Leftrightarrow n\cdot \log_{10}2 > 20\cdot \log_{10}5$$
$$\Leftrightarrow n\cdot \log_{10}2 > 20(1-\log_{10}2)$$
$$\Leftrightarrow n > 20\left(\frac{1}{\log_{10}2}-1\right)$$

Utilizando as estimativas do enunciado, obtemos

$$20\left(\frac{1}{\log_{10}2}-1\right)<20\left(\frac{1}{0{,}3}-1\right)=20\left(\frac{10}{3}-1\right)=\frac{140}{3}<47$$

e

$$20\left(\frac{1}{\log_{10}2}-1\right)>20\left(\frac{1}{0{,}302}-1\right)=20\left(\frac{1000}{302}-1\right)=\frac{6980}{151}>46.$$

Portanto, o menor valor possível de n é 47.
Pontuação: Até dez pontos.

04. Poupêncio investiu R$ 1000,00 numa aplicação bancária que rendeu juros compostos de 1% ao mês, por cem meses seguidos. Decorrido esse prazo, ele resgatou integralmente a aplicação. O montante resgatado é suficiente para que Poupêncio compre um computador de R$ 2490,00 à vista? Explique sua resposta.

Questão 04
Comentários: A questão aborda conhecimentos sobre matemática financeira, sequências e binômio de Newton.
Para ver por que o dinheiro de que Poupêncio dispunha após os cem meses foi suficiente para a compra, observe-se que, se o montante investido em um certo mês fosse x reais, no mês seguinte Poupêncio teria x + (1%)x = $\left(1+\frac{1}{100}\right)x$ reais. Portanto, a sequência que define a evolução do montante aplicado é uma progressão geométrica de razão $1+\frac{1}{100}$ e termo inicial 1000, de maneira que Poupêncio resgatou, após cem meses, um total de $1000\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$ reais. Esse total é certamente maior que 2490 reais, pois a fórmula do binômio de Newton nos dá

$$1000\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=1000\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\frac{1}{100^k}$$
$$>1000\left\{\binom{100}{0}\frac{1}{100^0}+\binom{100}{1}\frac{1}{100^1}+\binom{100}{2}\frac{1}{100^2}\right\}$$
$$=1000\left(2+\frac{99}{200}\right)=2495.$$

Pontuação: Até dez pontos.

05. Em um sistema Cartesiano de origem O, seja P o ponto de coordenadas (1, 2) e r uma reta que passa por P e intersecta os semieixos positivos das abscissas e ordenadas, respectivamente, nos pontos A e B. Calcule o menor valor possível para a área do triângulo AOB.

Questão 05
Comentários: A questão aborda conhecimentos sobre geometria analítica, funções de segundo grau e álgebra elementar.
Se $A(a, 0)$, $B(0, b)$ e S denota a área de AOB, então a, $b > 0$ e $S = \frac{ab}{2}$. Por outro lado, a equação da reta r no sistema Cartesiano em questão é $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, e, como $P\in r$, devemos ter $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$. A partir disso, há duas possíveis abordagens.

i. S será mínima se e somente se $\frac{1}{2S}$ for máxima. Como

$$\frac{1}{2S}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\left(1-\frac{2}{b}\right)\frac{1}{b}=(1-2u)u=-2u^2+u,$$

em que $u = \frac{1}{b}$, é suficiente maximizarmos, para $u > 0$, a função $f(u) = -2u^2 + u$. A teoria de máximos e mínimos de funções de segundo grau garante que o valor máximo de tal função é $\frac{1}{8}$, valor atingido quando $u = \frac{1}{4}$. Portanto, o valor máximo para $\frac{1}{2S}$ é $\frac{1}{8}$, e daí obtemos que o valor mínimo para S é 4.

ii. Isolando a em função de b, obtemos $a = \dfrac{b}{b-2}$; como $a > 0$, temos $b - 2 > 0$, e daí

$$\begin{aligned} 2S = ab = \frac{b^2}{b-2} &= b+2+\frac{4}{b-2} \\ &= b-2+\frac{4}{b-2}+4 \\ &\geq 2\sqrt{(b-2)\cdot\frac{4}{b-2}}+4 = 8, \end{aligned}$$

em que utilizamos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para dois números reais positivos na última passagem acima. Portanto, $S \geq 4$, sendo o valor 4 atingido quando $b - 2 = \dfrac{4}{b-2}$, isto é, quando $b = 4$.
Pontuação: Até dez pontos.

06. Temos, em um mesmo plano, uma reta r e um triângulo ABC, de lados $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm e $BC = 5$ cm, situado de tal forma que o lado AC é paralelo à reta r, distando 3 cm dela. Calcule, em cm^3, os possíveis valores para o volume V do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo ABC em torno da reta r.

Questão 06
Comentários: A questão explora conhecimentos sobre geometria espacial e geometria plana.
Inicialmente, como $3^2 + 4^2 = 5^2$, a recíproca do teorema de Pitágoras garante que ABC é retângulo em A. Portanto, o ponto D, de interseção da reta r com a reta suporte do lado AB, coincide com o pé da perpendicular baixada de B (ou de A) a r. Seja E o pé da perpendicular baixada de C a r. Há dois casos a considerar:

a) B e D coincidem: neste caso, temos $V = V_1 - V_2$, em que V_1 é o volume do cilindro circular reto de geratriz AC e raio da base CE e V_2 o volume do cone circular reto de altura DE e raio da base CE. Em cm^3, $V_1 = \pi 3^2.4 = 36\pi$ e $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi 3^2.4 = 12\pi$; logo, $V = 36\pi - 12\pi = 24\pi$.

b) A é o ponto médio do segmento BD: sendo F a interseção de r com a reta suporte do lado BC, temos $V = V_3 - (V_1 + V_4)$, em que V_3 é o volume do cone circular reto de altura DF e raio da base BD e V_4 o volume do cone circular reto de altura EF e raio da base CE. Agora, a semelhança dos triângulos CEF e BDF garante que $EF = 4$ cm, daí $DF = 8$ cm. Portanto, em cm^3 temos $V_3 = \dfrac{1}{3}\pi 6^2.8 = 96\pi$ e $V_4 = V_2 = 12\pi$, de maneira que $V = 96\pi - (36\pi + 12\pi) = 48\pi$.

Pontuação: Até dez pontos.

07. Os inteiros não todos nulos *m*, *n*, *p*, *q* são tais que $45^m.60^n.75^p.90^q = 1$.
Pede-se:

A) dar exemplo de um tal quaterno (*m*, *n*, *p*, *q*).

B) encontrar todos os quaternos (*m*, *n*, *p*, *q*) como acima, tais que $m + n + p + q = 8$.

Questão 07
Comentários: A questão explora conhecimentos sobre aritmética e sistemas lineares.
Escrevendo $45 = 3^2\cdot 5$, $60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$, $75 = 3\cdot 5^2$ e $90 = 2\cdot 3^2\cdot 5$, obtemos

$1 = (3^2\cdot 5)^m(2^2\cdot 3\cdot 5)^n(3\cdot 5^2)^p(2\cdot 3^2\cdot 5)^q = 2^{2n+q}3^{2m+n+p+2q}5^{m+n+2p+q}$,

e, a partir daí, o sistema linear homogêneo de equações

$$\begin{cases} 2n + q = 0 \\ 2m + n + p + 2q = 0 \\ m + n + 2p + q = 0. \end{cases}$$

A primeira equação do sistema nos dá $q = -2n$. Substituindo essa relação nas duas outras equações e escrevendo-as como um sistema linear em *m* e *p*, obtemos

$$\begin{cases} 2m + p = 3n \\ m + 2p = n\,. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para *m* e *p*, obtemos $m = \dfrac{5n}{3}$ e $p = -\dfrac{n}{3}$.

a) Fazendo $n = 3$, obtemos a possibilidade $m = 5$, $n = 3$, $p = -1$, $q = -6$.

b) Como $m + n + p + q = \dfrac{5n}{3} + n - \dfrac{n}{3} - 2n = \dfrac{n}{3}$, devemos ter $\dfrac{n}{3} = 8$, e daí $n = 24$, $m = 40$, $p = -8$, $q = -48$.

Pontuação: O item A vale até seis pontos; o item B vale até quatro pontos.

08. *ABC* é um triângulo retângulo em *A*, com catetos *AB* e *AC* de medidas respectivamente iguais a 3 cm e 4 cm. Com centros em *B* e em *C*, traçamos dois círculos β e γ , de raios respectivamente 3 cm e 4 cm, e, em seguida, uma reta *r* que passa por *A* e intersecta β e γ respectivamente nos pontos *P* e *Q*, com $P, Q \neq A$. Calcule o maior valor possível do produto dos comprimentos dos segmentos *PA* e *QA*.

Questão 08
Comentários: A questão aborda conhecimentos sobre geometria plana e funções trigonométricas.

Se $\angle PAB = \theta$, então $\angle QAC = 90^0 - \theta$. Como os triângulos *PAB* e *QAC* são isósceles de bases *PA* e *QA*, respectivamente, a trigonometria de triângulos retângulos nos dá $PA = 6\cos\theta$ e $QA = 8\cos\left(90^0 - \theta\right) = 8\,sen\,\theta$. Logo,

$$PA\cdot QA = 48\cos\theta\ \text{sen}\ \theta = 24\,sen(2\theta),$$

de maneira que o maior valor possível para $PA\cdot QA$ é 24 cm², obtido quando $\theta = 45^0$.
Pontuação: Até dez pontos.