Questão 1 – Seja $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3dx+e$ um polinômio com coeficientes reais em que $b=-1$ e uma das raízes é $x=-1$. Sabe-se que $a<b<c<d<e$ formam uma progressão aritmética crescente.

a) Determine a razão dessa progressão aritmética e os coeficientes do polinômio $P(x)$.

Sabe-se que $a<b<c<d<e$ formam uma progressão aritmética crescente (PA crescente). Seja r a razão dessa PA. Escrevendo essa PA em função de b e r, temos

$$a=b-r<b<c=b+r<d=b+2r<e=b+3r\,.$$

Usando o fato que $x=-1$ é raiz do polinômio $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3dx+e$, obtemos:

$$0=P(-1)=a(-1)^4+b(-1)^3+c(-1)^2+3d(-1)+e \quad\Rightarrow\quad a-b+c-3d+e=0\,.$$

Segue que

$$(b-r)-b+(b+r)-3(b+2r)+(b+3r)=0 \quad\Rightarrow\quad -b-3r=0 \quad\Rightarrow\quad r=-\frac{b}{3}\,.$$

Como $b=-1$, temos $r=\frac{1}{3}$.

Determinemos agora os coeficientes $a,\ b,\ c,\ 3d,\ e,$ do polinômio $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3dx+e$:

$$a=b-r=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3},\ b=-1,\ c=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3},\ 3d=3(-1+\frac{2}{3})=-1,\ e=-1+\frac{3}{3}=0\,.$$

Portanto, $P(x)=-\frac{4}{3}x^4-1x^3-\frac{2}{3}x^2-1x$.

b) Encontre as demais raízes do polinômio $P(x)$.

Note que o polinômio $P(x)$ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$P(x)=-\frac{1}{3}x(4x^3+3x^2+2x+3)\,.$$

Note que $x=0$ é raiz de $P(x)$. Como $x=-1$ é raiz do polinômio $P(x)$, temos que também é raiz do polinômio $Q(x)=4x^3+3x^2+2x+3$. Assim dividindo o polinômio $Q(x)$ por $x+1$ obtemos:

Divisão de polinômio ou Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

$$\begin{array}{rl}
4x^3+3x^2+2x+3 & \underline{|\ x+1\ } \\
\underline{-4x^3-4x^2\qquad\qquad} & 4x^2-x+3 \\
-x^2+2x+3 & \\
\underline{+x^2+x\qquad} & \\
3x+3 & \\
\underline{-3x-3} & \\
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr:r}
-1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\
\hline
 & \underbrace{4 \quad -1 \quad 3}_{4x^2-x+3} & & & 0
\end{array}$$

Resto da divisão

Logo, $P(x)=-\frac{1}{3}x\cdot Q(x)=-\frac{1}{3}x(4x^2-x+3)(x+1)$. As raízes de $4x^2-x+3$ são:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-48}}{8} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{8}\pm\frac{\sqrt{47}}{8}i\,.$$

Portanto, as raízes do polinômio $P(x)$ são: -1, 0, $\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{47}}{8}i$ e $\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{47}}{8}i$.

Questão 2 – No plano cartesiano, considere os pontos $A(-1,2)$ e $B(3,4)$.

a) Encontre a equação da reta r que passa por A e forma com o eixo das abscissas um ângulo de 135°, medido do eixo para a reta no sentido anti-horário.

A equação da reta r que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$ e tem inclinação de θ é dada por, $y - y_A = m_r(x - x_A)$, onde $m_r = tg(\theta)$ é o coeficiente angular da reta r.
Como $A(-1,2)$ e $\theta = 135^\circ$, temos $m_r = tg(135^\circ) = -1$ e

$$y-(2) = -1(x-(-1)) \quad \Rightarrow \quad y-2 = -1(x+1)) \quad \Rightarrow \quad y = -x+1.$$

Equação da reta r: $y_r = -x+1$.

b) Seja s a reta que passa por B e é perpendicular à reta r. Encontre as coordenadas do ponto P, determinado pela intersecção das retas r e s.

Sejam m_r e m_s os coeficientes angulares das retas r e s, respectivamente. Como as retas r e s são perpendiculares, temos $m_r . m_s = -1$. Pelo item **a**, sabemos que $m_r = -1$, logo

$$m_s = \frac{-1}{m_r} \quad \Rightarrow \quad m_s = \frac{-1}{-1} \quad \Rightarrow \quad m_s = 1.$$

Como a reta s passa pelo ponto $B(3,4)$, sua equação é dada por

$$y-(4) = 1(x-(3)) \quad \Rightarrow \quad y-4 = x-3 \quad \Rightarrow \quad y = x+1.$$

Então, a equação da reta s é dada por: $y_s = x+1$.

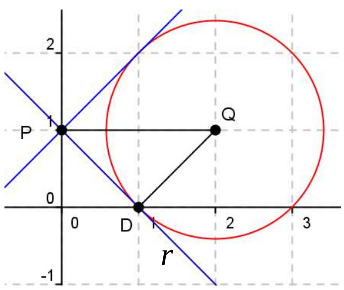
Determinemos agora o ponto P dado pela intersecção das retas r e s $\begin{cases} y_r = -x+1 \\ y_s = x+1 \end{cases}$.

Resolvendo o sistema, obtemos $x+1 = -x+1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$. Logo $P(0,1)$.

c) Determine a equação da circunferência que possui centro no ponto $Q(2,1)$ e tangencia as retas r e s.

Seja D o ponto de tangência da circunferência com a reta r. Logo o comprimento do segmento $\overline{QD}$ é o raio R da circunferência, isto é, $R = QD$. Como D é o ponto de tangência da circunferência com a reta r, temos que o ângulo $P\hat{D}Q$ é retângulo em D, ou seja, $P\hat{D}Q = 90^\circ$. A reta que passa por P e Q é paralela ao eixo dos x, logo $D\hat{P}Q = P\hat{Q}D = 45^\circ$ e o triângulo retângulo DPQ é isósceles de lado QD e hipotenusa $PQ = 2$.
Assim,

$$R^2 + R^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad 2R^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{2}.$$



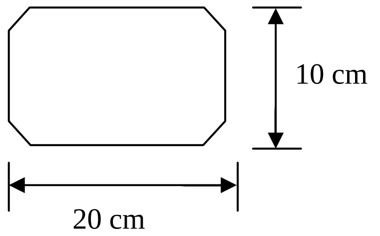
A equação de uma circunferência que possui centro no ponto (x_o, y_o) e raio R é dada por

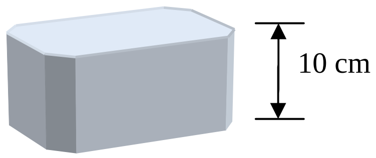
$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2.$$

Portanto, a equação da circunferência que possui centro no ponto $Q(2,1)$ é:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

Questão 3 – Uma empresa de sorvete utiliza como embalagem um prisma reto, cuja altura mede 10 cm e cuja base é dada conforme descrição a seguir: de um retângulo de dimensões 20 cm por 10 cm, extrai-se em cada um dos quatro vértices um triângulo retângulo isósceles de catetos de medida 1cm.





a) Calcule o volume da embalagem.

Seja V o volume da embalagem, isto é, $V = A \times h$, onde :

h = altura da embalagem,
A = área da base desta embalagem.

Temos que, cada um dos quatro triângulos extraídos tem área igual a $\frac{1}{2}$ cm². Logo

$$A = (20 \times 10 - 4\frac{1}{2}) = 198 \text{ cm}^2 .$$

Assim, o volume desta embalagem é dado por

$$V = 198 \times 10 = 1980 \text{ cm}^3 .$$

b) Sabendo que o volume ocupado por esse sorvete aumenta em $\frac{1}{5}$ (um quinto) quando passa do estado líquido para o estado sólido, qual deve ser o volume máximo ocupado por esse sorvete no estado líquido, nessa embalagem, para que, ao congelar, o sorvete não transborde?

Sejam

V = volume da embalagem, isto é $V = A \times h$.
V_0 = o volume que deve ser colocado na embalagem, para que, ao congelar, o sorvete não transborde.

Então

$$V_0 + \frac{1}{5}V_0 = V \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{5}V_0 = V \Rightarrow \quad V_0 = \frac{5}{6}V .$$

Portanto,

$$V_0 = \frac{5}{6} \times 1980 = 1650 \text{ cm}^3 .$$

Questão 4 – Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funções definidas por $f(x)=x-14$ e $g(x)=-x^2+6x-8$, respectivamente.

a) Determine o conjunto dos valores de x tais que $f(x)>g(x)$.

Defina

$$h(x)=f(x)-g(x)=x^2-5x-6.$$

Neste caso, $f(x)>g(x)\Leftrightarrow h(x)>0$.

Note que a representação gráfica da função h é uma parábola com concavidade voltada para cima, cujas raízes são dadas por:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2}\ \Rightarrow\ x_1=-1 \text{ e } x_2=6.$$

Logo $h(x)>0$ para todos os valores de x fora do intervalo compreendido entre as raízes x_1 e x_2. Assim o conjunto procurado é,

$$X=\{x\in\mathbb{R}; h(x)>0\}=\{x\in\mathbb{R}; f(x)>g(x)\}=\mathbb{R}-[-1,6]=]-\infty,-1[\cup]6,+\infty[.$$

b) Determine o menor número real κ tal que $f(x)+\kappa\geq g(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Defina

$$h_k(x)=f(x)+k-g(x)=x^2-5x-6+k.$$

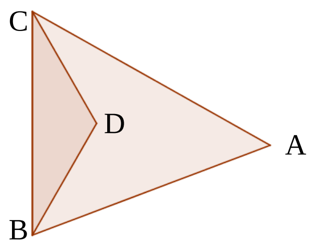
Neste caso, $f(x)+k\geq g(x)\Leftrightarrow h_k(x)\geq 0$.

Note que a representação gráfica da função h_k é uma parábola com concavidade voltada para cima, logo $h_k(x)\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, quando $\Delta\leq 0$, ou seja, quando

$$\Delta=25+24-4k\leq 0\ \Rightarrow\ k\geq\frac{49}{4}.$$

Como queremos o menor k, seu valor é $k=\dfrac{49}{4}$.

Questão 5 – Considere dois triângulos ABC e DBC, de mesma base $\overline{BC}$, tais que D é um ponto interno ao triângulo ABC. A medida de $\overline{BC}$ é igual a 10 cm. Com relação aos ângulos internos desses triângulos, sabe-se que: $D\hat{B}C=B\hat{C}D$, $D\hat{C}A=30^\circ$, $D\hat{B}A=40^\circ$, $B\hat{A}C=50^\circ$.

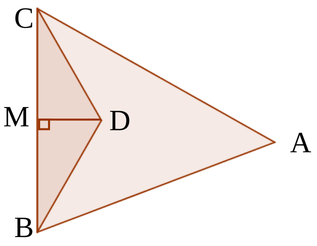


a) Encontre a medida do ângulo $B\hat{D}C$.

Seja $\alpha = D\hat{B}C = B\hat{C}D$. Logo $C\hat{B}A = \alpha + 40°$ e $B\hat{C}A = \alpha + 30°$. Como a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é $180°$, temos $C\hat{B}A + B\hat{C}A + B\hat{A}C = 180°$, ou seja, $(\alpha + 40°) + (\alpha + 30°) + 50° = 180°$.
Logo, $2\alpha = 180° - 40° - 30° - 50° = 60°$ e assim, $\alpha = 30°$.

Do triângulo DBC, obtemos a seguinte relação entre seus ângulos internos: $B\hat{D}C + D\hat{C}B + C\hat{B}D = 180°$.
Logo, $B\hat{D}C + 2\alpha = 180°$, e assim $B\hat{D}C = 180° - 60° = 120°$.

b) Calcule a medida do segmento $\overline{BD}$.



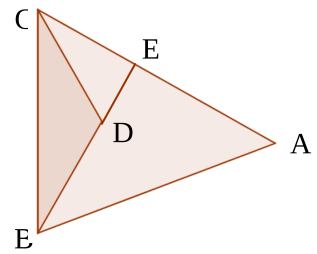
Seja M um ponto no segmento $\overline{BC}$ tal que $\overline{DM}$ é a altura do triângulo DBC de base $\overline{BC}$. Como $D\hat{B}C = B\hat{C}D$, segue que o triângulo DBC é isósceles de base $\overline{BC}$, e assim M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e

$$BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

Do triângulo BMD, retângulo em M, temos

$$\cos(\alpha) = \frac{BM}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{BD} \Rightarrow BD \cdot \sqrt{3} = 10 \Rightarrow BD = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

c) Admitindo-se tg $(50°) = \frac{6}{5}$, determine a medida do segmento $\overline{AC}$.



Seja E o ponto de interseção do segmento $\overline{AC}$ com o prolongamento do segmento $\overline{BD}$. Do triângulo ABE, obtemos a seguinte relação: $B\hat{E}A + E\hat{A}B + A\hat{B}E = 180°$. Logo $B\hat{E}A = 180° - 40° - 50° = 90°$. Da mesma forma, temos que $B\hat{E}C = 90°$. Como $CD = BD = \frac{10\sqrt{3}}{3}$, do triângulo CED, retângulo em E, obtemos:

$$DE = DC \cdot sen(30°) \Rightarrow DE = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow DE = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$CE = DC \cdot \cos(30°) \Rightarrow CE = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CE = 5.$$

Logo $BE = BD + DE = \frac{10\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3}$, ou seja, $BE = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$.

Usando que $tg(50°) = \frac{6}{5}$, obtemos:

$$\frac{6}{5} = tg(50°) = \frac{BE}{AE} \Rightarrow AE = \frac{5}{6}BE \Rightarrow AE = \frac{5}{6} \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow AE = \frac{25\sqrt{3}}{6}$$. Assim, $AC = AE + EC = 5 + \frac{25\sqrt{3}}{6}$.