Vestibular 2012 — 2ª fase
Gabarito — Matemática

Questão 01 (Valor: 15 pontos)

Como S é ponto da parábola, então o par de coordenadas cartesianas de S é da forma $(x, 2x^2)$.

O coeficiente angular da reta SP é igual a $\dfrac{2-2x^2}{-1-x}$ e o coeficiente angular da reta SQ é igual a $\dfrac{2-2x^2}{1-x}$.

Como as retas SP e SQ são perpendiculares, então o produto dos coeficientes angulares dessas retas é igual a – 1, ou seja,

$$\left(\frac{2-2x^2}{-1-x}\right)\left(\frac{2-2x^2}{1-x}\right)=-1$$

Como $x \neq -1$ e $x \neq 1$, tem-se que

$$4(1-x^2)^2 = 1-x^2$$

$$4(1-x^2)=1$$

$x^2 = 1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$, logo $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, para $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, tem-se $S\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ e para $x=+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, tem-se $S\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

Questão 02 (Valor: 15 pontos)

Fazendo 2x–1 = t, tem-se

$x=\dfrac{t+1}{2}$, portanto

$$f(t)=\frac{\frac{t+1}{2}}{3\frac{t+1}{2}-6}=\frac{t+1}{3t+3-12}=\frac{t+1}{3t-9}.$$

Logo,

$f(x)=\dfrac{x+1}{3x-9}$, ou seja, $y=\dfrac{x+1}{3x-9}$.

Assim,

3xy – 9y = x + 1

x(3y – 1) = 9y + 1

$x=\dfrac{9y+1}{3y-1}$, sendo x a imagem de y pela função f^{-1}, tem-se

$f^{-1}(y)=\dfrac{9y+1}{3y-1}$ ou

$f^{-1}(x)=\dfrac{9x+1}{3x-1}$.

Questão 03 (Valor: 20 pontos)

1. $b = 6 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ ...$, soma dos termos da progressão geométrica $\left(6,\ 2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ ...\right)$ em que 6**.**q = 2, portanto a razão da P.G. é $q = \frac{1}{3}$.

   Como

   $b = \frac{a_1}{1-q}$, tem-se

   $$b = \frac{6}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6}{\frac{2}{3}} = 9$$

   logo, b = 9.

2. Como a_5, a_9, a_{10} e a_{14} são as abscissas dos pontos de interseção das curvas de equações $x^2 + y^2 = 82$ e $y = \frac{9}{x}$, então deve-se resolver o sistema

   $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 82 \\ y = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{81}{x^2} = 82 \\ y = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 81 - 82x^2 = 0 \\ y = \frac{9}{x} \end{cases}$$

   Fazendo $x^2 = u$, tem-se
   $u^2 - 82u + 81 = 0$
   em que u = 81 ou u = 1, portanto
   $x^2 = 81$ com $x = \pm 9$ ou
   $x^2 = 1$ com $x = \pm 1$, assim $a_5 = 9$, $a_9 = 1$, $a_{10} = -1$ e $a_{14} = -9$.

   Calculando-se a razão r da P.A., tem-se
   $r = a_{10} - a_9 = -1-(1) = -2$, logo $r = -2$, como $a_n = a_m + (n-m)r$, tem-se
   $a_{50} = a_5 + (50-5)r = 9 + 45.(-2) = -81$
   logo, d = –81.

3. Sabe-se que
   $p(x) = h(x)(x + 1) + 40$ e que $p(x) = 9x^4 + cx^3 - 81x$, portanto
   $p(-1) = 0 + 40$ e $p(-1) = 9 - c + 81$, logo
   $9 - c + 81 = 40$
   $c = 50$

   logo $p(x) = 9x^4 + 50x^3 - 81x$.

Questão 04 (Valor: 15 pontos)

Sabe-se que det(AB) = detA**.**detB

$$\det A = \frac{x}{3-x}\begin{vmatrix} \operatorname{sen}3x & \cos 3x \\ -\cos 3x & \operatorname{sen}3x \end{vmatrix} = \frac{x}{3-x}(\operatorname{sen}^2 3x + \cos^2 3x) = \frac{x}{3-x}$$

$$\det B = (-1)\sqrt{2}\begin{vmatrix} 3^x & 4 \\ 9 & 2^x \end{vmatrix} = -\sqrt{2}\left(6^x - 36\right) = \sqrt{2}\left(6^2 - 6^x\right)$$

$$\det A.\det B = \sqrt{2}.\frac{x}{3-x}.\left(6^2 - 6^x\right) \le 0.$$

Para determinar o conjunto solução da inequação, deve-se analisar o sinal da expressão $\sqrt{2}\frac{x}{3-x}\left(6^2 - 6^x\right)$, isto é o sinal de x, $3 - x$ e de $6^2 - 6^x$.

Assim, tem-se

		0		2		3	
x	–	•	+		+		+
3 – x	+		+		+	∘	–
$6^2 - 6^x$	+		+	•	–		–
det(AB)	–	•	+	•	–	∘	+

O conjunto solução da inequação é
$]-\infty, 0] \cup [2, 3[$ ou $\{x \in \mathbf{R};\ x \leq 0 \text{ ou } 2 \leq x < 3\}$.

Questão 05 (Valor: 20 pontos)

Cálculo das coordenadas do centro da circunferência
$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 4 + 1 + 4$
$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$
Centro da circunferência: (–1, 2).

Aplicando a rotação de $\frac{\pi}{2}$rd ao ponto (–1, 2), obtém-se $P'(-2, -1)$.

Cálculo do ângulo α
Como

$$\text{tg}\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 0, \text{ tem-se}$$

$$2\alpha + \frac{\pi}{3} = k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}.$$

Considerando que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então

$$\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} < \pi,$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \leq k\frac{\pi}{2} < \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{2\pi}{3} \leq k\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{4}{3} \leq k < \frac{7}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Logo, k = 2 e $\alpha = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$.

O coeficiente angular de r é igual a $\text{tg}\alpha = \text{tg}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

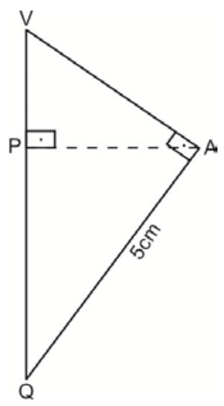
Uma equação da reta que passa pelo ponto P(–2, –1) e tem coeficiente angular $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ é

$$y+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2),$$

ou seja,

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}-1.$$

Questão 06 (Valor: 15 pontos)



Sejam V o vértice da pirâmide, A, B, C, D, E e F os vértices da base, P o centro da base e Q o centro da esfera.

Para calcular o volume da pirâmide precisa-se encontrar a medida do lado ℓ da base e a da altura h da pirâmide.

A base da pirâmide é um hexágono regular, então $\ell = \overline{PA}$ e a altura h = $\overline{VP}$.

Considerando que a pirâmide é reta, o segmento VP é perpendicular ao segmento PA. Por outro lado, como a reta VA é tangente à superfície esférica em A, tem-se que o ângulo VAQ é reto.

Logo, $\Delta AQV \sim \Delta PQA$ e, consequentemente,

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{QV}}{\overline{QA}} \quad (\mathrm{I}).$$

Sabe-se que $\overline{AQ}=5\text{cm}$, pois A é um ponto da superfície esférica, e que a distância do vértice da pirâmide ao centro da esfera é $\overline{VQ}=\frac{25}{4}\text{cm}$.

De (I) tem-se $\frac{5}{\overline{PQ}}=\frac{\frac{25}{4}}{5} \Rightarrow \overline{PQ}=4\text{cm}.$

No triângulo retângulo APQ, a hipotenusa AQ mede 5cm e o cateto PQ mede 4cm.

Logo, $\ell = \overline{PA} = 3\text{cm}$.

A altura h da pirâmide é dada por $h=\overline{VP}=\overline{VQ}-\overline{PQ}=\frac{25}{4}-4 \Rightarrow h=\frac{9}{4}\text{cm}.$

Cálculo do volume da pirâmide $V=\frac{1}{3}S_B h$

$$S_B=6.\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{2}.9\sqrt{3}=\frac{27\sqrt{3}}{2}$$

$$S_B=\frac{27\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$$

$$V=\frac{1}{3}.\frac{27\sqrt{3}}{2}.\frac{9}{4}=\frac{81\sqrt{3}}{8}$$

$$V=\frac{81\sqrt{3}}{8}\text{cm}^3$$

Obs.: Outras abordagens poderão ser aceitas, desde que sejam pertinentes.

Salvador, 18 de dezembro de 2011

Antonia Elisa Caló Oliveira Lopes
Diretora do SSOA/UFBA