

01. Dois veículos, A e B, partem de um ponto de uma estrada, em sentidos opostos e com velocidades constantes de 50km/h e 70km/h, respectivamente. Após uma hora, o veículo B retorna e, imediatamente, segue em perseguição ao outro, com velocidade constante igual a 80km/h. Calcule em quantas horas os carros estarão emparelhados, novamente, a contar do instante da partida.

Questão 01

Tópico: Funções e equações.

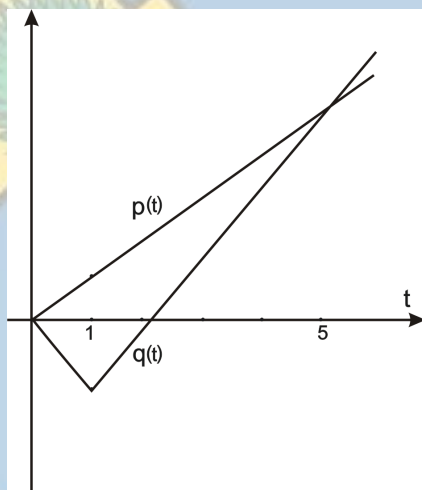
Solução: Consideremos as funções que descrevem as distâncias percorridas pelos veículos A e B em função do tempo (hora) e respeitando o sentido de percurso.

- Veículo A

$$p : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(t) = 50t$$

- Veículo B

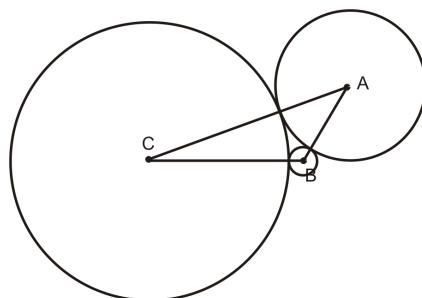
$$q : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(t) = \begin{cases} -70t & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 80t - 150 & \text{se } 1 < t \end{cases}$$



Os gráficos das funções interceptam-se quando $50t = 80t - 150$, ou seja, no instante $t = 5$ (horas).

Pontuação: A questão vale dez pontos.

02. Um triângulo com vértices A, B e C tem comprimentos de lados $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 11$ e $\overline{CA} = 15$ (em unidade de comprimento). Para cada vértice, traça-se uma circunferência com centro no vértice de modo que as três circunferências traçadas são tangentes entre si (como na figura). Calcule os raios das circunferências.



Questão 02

Tópico: Geometria Plana e Sistema Linear.

Solução: Sejam:

- a) o comprimento do raio do círculo com centro no vértice $A = X$.
- b) o comprimento do raio do círculo com centro no vértice $B = Y$.
- c) o comprimento do raio do círculo com centro no vértice $C = Z$.

Sendo assim, temos o sistema de equações,

$$\begin{array}{rcl} x & + & y & = & 8 \\ & & y & + & z & = & 11 \\ x & & & + & z & = & 10 \end{array}$$

Daí, seguem os valores, $x = 6$, $y = 2$ e $z = 9$

Pontuação: A questão vale dez pontos.

03. Um professor pretendia elaborar uma lista de exercícios com dez questões. Para isso, ele escolheu quatro problemas de Combinatória, sete problemas de Geometria e oito de Álgebra. Determine o número de listas distintas que o professor poderia elaborar (não considere a ordem de apresentação das questões), ao decidir que a lista teria duas questões de Análise Combinatória, cinco questões de Geometria e três questões de Álgebra.

Questão 03

Tópico: Análise Combinatória.

Solução: Em resumo, temos a tabela abaixo.

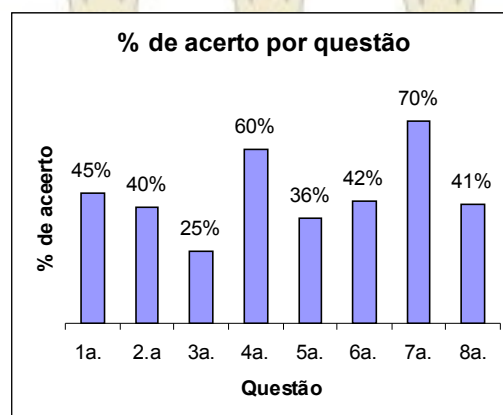
Combinatória	4 questões	escolher 2
Geometria	7 questões	escolher 5
Álgebra	8 questões	escolher 3

Pelo Teorema Fundamental da Contagem, obtemos que o número n de listas distintas que o professor pode elaborar é:

$$n = (4 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (8 \cdot 7 \cdot 6) / 2! \cdot 5! \cdot 3!$$

Pontuação: A questão vale dez pontos.

04. Considere que 36.000 candidatos compareceram à 1ª. Etapa de um vestibular da UFC. Nessa etapa, foram propostas oito questões de múltipla escolha de Matemática. Um levantamento estatístico sobre essa prova foi transcrito no gráfico abaixo, onde cada coluna registra o percentual do número de candidatos que acertaram a questão correspondente.



- A) Calcule o número de alunos que acertaram a 3ª questão.

B) Mostre que mais de 10.000 candidatos acertaram, pelo menos, duas questões.

Questão 04

Tópico: Porcentagem e contagem.

A) **Solução:** Seja n_i o número de candidatos que acertaram questão i . Sendo assim,

$$n_3 = 36.000 \cdot \frac{25}{100} = 9.000.$$

B) **Solução:** Os maiores índices de acertos ocorreram na 4ª e 7ª questões, que correspondem aos seguintes número de candidatos:

$$n_4 = 36.000 \cdot \frac{7}{100} = 25.200 \quad \text{e} \quad n_7 = 36.000 \cdot \frac{4}{100} = 14.400.$$

Portanto, o número de candidatos que acertaram, pelo menos, essas duas questões foi

$$n_4 + n_7 - 36.000 = 10.800.$$

Pontuação: A questão vale dez pontos, sendo quatro para o item A e seis para o item B.

05. Considere a função $f : (\cdot, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x$.

A) Calcule $f\left(\frac{7}{177}\right)$.

B) Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais $f(a^2 - a + 1) < 1$.

Questão 05

Tópico: Logaritmo, exponencial e desigualdade.

A) **Solução:** Como $\frac{6}{162} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3^4} = 3^{-3}$, temos $f\left(\frac{6}{162}\right) = \log_3 3^{-3} = -3 \log_3 3 = -3$.

B) **Solução:** Por definição, temos $f(a^2 - a + 1) = \log_3(a^2 - a + 1) < 1$. Como a função exponencial $g(x) = 3^x$ é crescente, segue que $a^2 - a + 1 < 3$, ou seja, a desigualdade inicial é equivalente à desigualdade $(a - 2)(a + 1) < 0$. Um estudo de sinal nos dá que a desigualdade $f(a^2 - a + 1) < 1$ é verdadeira se, e somente se, $-1 < a < 2$.

Pontuação: A questão vale dez pontos, sendo quatro para o item A e seis para o item B.

06. Dada a circunferência $C : x^2 - 2x + y^2 = 24$ no plano cartesiano xy .

A) Verifique que o ponto $P(4,4)$ pertence a essa circunferência.

B) Determine a equação da reta tangente à circunferência no ponto $P(4,4)$.

Questão 06

Tópico: Logaritmo Geometria Analítica Plana

A) **Solução:** É suficiente verificar que as coordenadas de $P(4,4)$ satisfazem a equação, ou seja, $4^2 - 2 \cdot 4 + 4^2 = 24$.

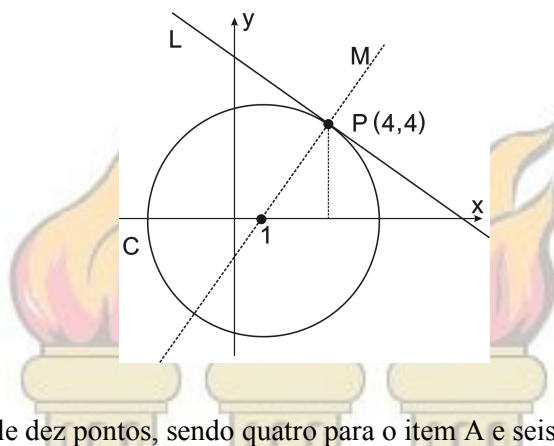
B) **Solução:** Completando o quadrado, obtemos a equação $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$. Portanto, a circunferência C tem centro no ponto $A(1,0)$ e raio $r = 5$.

Como a reta procurada L é perpendicular ao raio \overline{AP} e esse raio tem inclinação $\frac{4}{3}$, segue que

$L : y = -\frac{3}{4}x + k$. Por outro lado, o ponto $P \in L$, sendo assim, suas coordenadas satisfazem a equação da reta,

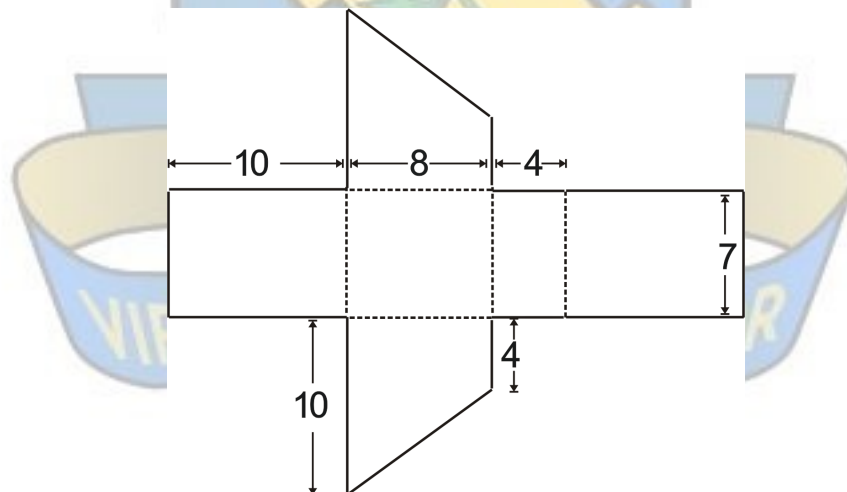
$$4 = -\frac{3}{4} \cdot 4 + k.$$

Daí, concluímos que $L : y = -\frac{3}{4}x + 7$.

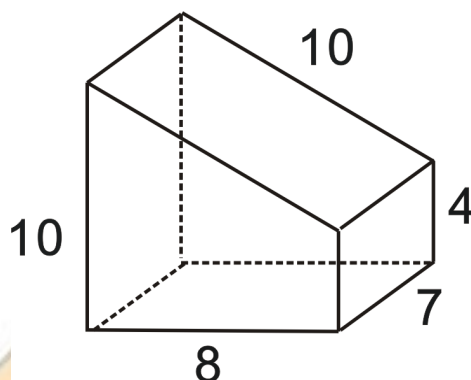


Pontuação: A questão vale dez pontos, sendo quatro para o item A e seis para o item B.

07. Uma caixa de cartolina em forma de um tronco de prisma retangular reto foi planificada, obtendo-se o recorte de cartolina indicado na figura abaixo. Para recuperar a caixa basta dobrar a cartolina nas linhas pontilhadas. As dimensões das arestas, em unidades de comprimentos, são como estão indicadas na figura.



- A) Calcule o volume da caixa original.
 B) Calcule a área da cartolina.

Questão 07**Tópico:** Geometria Espacial e Geometria Plana.**A) Solução:** Ao reconstruirmos a caixa obtemos o prisma

Portanto, o volume da caixa é $V = 8 \cdot 7 \cdot \left(\frac{4+10}{2}\right)$. O valor $\frac{4+10}{2}$ é a altura média do tronco de prisma. Observe que a maior aresta da tampa superior mede 10.

B) Solução: A área total é a área dos dois trapézios mais a área do retângulo central.

$$A = 2 \cdot 8 \cdot \left(\frac{10+4}{2}\right) + 32 \cdot 7$$

Pontuação: A questão vale dez pontos, sendo cinco para o item A e cinco para o item B.**08.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

A) Calcule a matriz $A^2 = A \cdot A$ e $A^3 = A \cdot A \cdot A$ (produto matricial).B) Calcule a matriz B onde $B = I + A + A^2 + \dots + A^9$. Nessa soma, I denota a matriz identidade 2×2 e as outras parcelas são potências da matriz A .**Questão 08****Tópico:** Matrizes e Progressões.**A) Solução:** Efetuando os produtos matriciais, temos:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

B) Solução: Se $i \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, então,

$$A^i = \frac{1}{2^i} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2^i} I.$$

Se $i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, então,

$$A^i = \frac{1}{2^i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2^i} J.$$

Sendo assim, valem as igualdades:

$$I + A^2 + A^4 + A^6 + A^8 = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}\right) I = \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} I = \frac{1023}{512} I \text{ e}$$

$$A + A^3 + A^5 + A^7 + A^9 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512}\right) J = \frac{1 - \frac{1}{2048}}{\frac{1}{2}} J = \frac{2047}{1024} J.$$

Portanto, a matriz procurada é:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1.023}{012} & \frac{2.047}{1.024} \\ \frac{2.047}{1.024} & \frac{1.023}{012} \end{bmatrix}.$$

Pontuação: A questão vale dez pontos, sendo quatro para o item A e seis para o item B.

