COMVEST
Comissão Permanente para os Vestibulares

2010
vestibular nacional
UNICAMP

2ª Fase

Matemática

MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO

A prova de matemática da segunda fase do vestibular da UNICAMP é elaborada de forma a identificar candidatos com boa capacidade de leitura de textos, tabelas e gráficos, bom raciocínio abstrato e domínio dos conteúdos matemáticos ministrados no ensino fundamental e no ensino médio. Não se deseja que o candidato decore centenas de fórmulas, mas que use seus conhecimentos e sua experiência para resolver questões que, frequentemente, abrangem mais de um tópico de matemática e fogem do padrão de exercícios apresentados nos cursinhos. Também se espera dos candidatos que resolvam questões relativas a assuntos de seu cotidiano, formulando modelos matemáticos que expressem corretamente os problemas apresentados.

Ao comentar a prova de matemática, tivemos a preocupação de apresentar estratégias alternativas de resolução das questões. Assim, sempre que um item vier acompanhado de um apóstrofo, como em **a'** ou **b'**, uma maneira diferente (e equivalente) de se obter a solução do problema é apresentada, com o intuito de enriquecer o aprendizado dos leitores. Outras formas de resolver os problemas aparecem nos exemplos acima da média reproduzidos neste caderno. Já os exemplos abaixo da média ilustram enganos comumente cometidos por estudantes do ensino médio. A esses exemplos, acrescentamos sugestões para que os candidatos evitem deslizes ao responder às questões.

1. Uma confeitaria produz dois tipos de bolos de festa. Cada quilograma do bolo do tipo A consome 0,4 kg de açúcar e 0,2 kg de farinha. Por sua vez, o bolo do tipo B consome 0,2 kg de açúcar e 0,3 kg de farinha para cada quilograma produzido. Sabendo que, no momento, a confeitaria dispõe de 10 kg de açúcar e 6 kg de farinha, responda às questões abaixo.

a) Será que é possível produzir 7 kg de bolo do tipo A e 18 kg de bolo do tipo B? Justifique sua resposta.

b) Quantos quilogramas de bolo do tipo A e de bolo do tipo B devem ser produzidos se a confeitaria pretende gastar toda a farinha e todo o açúcar de que dispõe?

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Para produzir 7 kg de bolo do tipo A é preciso ter 7x0,4 = 2,8 kg de açúcar e 7x0,2 = 1,4 kg de farinha. Já os 18 kg de bolo do tipo B exigem 18x0,2 = 3,6 kg de açúcar e 18x0,3 = 5,4 kg de farinha. Assim, são consumidos 2,8 + 3,6 = 6,4 kg de açúcar e 1,4 + 5,4 = 6,8 kg de farinha. Como a confeitaria só dispõe de 6 kg de farinha e precisaria de 6,8 kg, não é possível produzir a quantidade desejada dos bolos.

Resposta: A confeitaria não é capaz de produzir 7 kg de bolo do tipo A e 18 kg de bolo do tipo B.

b) **(2 pontos)**
Digamos que a variável x represente a quantidade (em kg) produzida do bolo A e y represente a quantidade (também em kg) produzida do bolo B. Supondo que a confeitaria gastará todo o açúcar e toda a farinha disponíveis, o consumo de açúcar com a produção dos dois tipos de bolo é dado pela equação $0,4x + 0,2y = 10$, e o consumo de farinha é dado por $0,2x + 0,3y = 6$.
Resolvendo o sistema linear formado por essas duas equações, obtemos $x = 22,5$ kg e $y = 5$ kg.

Resposta: Devem ser produzidos 22,5 kg de bolo do tipo A e 5 kg de bolo do tipo B.

Exemplo Acima da Média

a)

Não, pois, de acordo com as tabelas abaixo, para se produzir 7 kg de bolo A e 18 kg de bolo B são necessários 10 kg de açúcar e 6,8 kg de farinha, portanto, a quantidade de farinha necessária é maior do que a disponível (6 kg)

Bolo	Açúcar	Farinha
1 kg de A	0,4 kg	0,2 kg
1 kg de B	0,2 kg	0,3 kg

∴ ⇒

Bolo	Açúcar	Farinha
7 kg A	2,8 kg	1,4 kg
18 kg B	7,2 kg	5,4 kg
Total	10 kg	6,8 kg

b) Sendo:

Bolo	Açúcar	Farinha
x kg de A	0,4x kg	0,2x kg
y kg de B	0,2y kg	0,3y kg
Total	10 kg	6 kg

$$\therefore \begin{cases} 0{,}4x + 0{,}2y = 10 \\ 0{,}2x + 0{,}3y = 6 \end{cases}$$

$\boxed{y = 5 \text{ kg de B}}$ e $\boxed{x = 22{,}5 \text{ kg de A}}$

Resp: Devem ser produzidos 22,5 kg de bolo A e 5 kg de bolo B

Exemplo Abaixo da Média

a) Não. Pois para produzir 7 Kg do bolo A serão necessários 1,4 Kg de farinha e 2,8 Kg de açúcar. E para produzir 18 Kg do bolo B serão necessários 5,4 Kg de farinha e 3,6 Kg de açúcar, assim o total usado será 6,8 Kg e 6,4 Kg de farinha e açúcar, respectivamente, o que ultrapassará o limite de farinha.

b) Como no bolo A o açúcar é o limitante e no bolo B a farinha é o limitante, temos:

0,4 Kg de açúcar — 1 Kg de bolo
10 Kg de açúcar — x

0,3 Kg de farinha - 1 Kg de bolo
6 Kg de farinha - y

x = 25 Kg de bolo

y = 20 Kg de bolo

R: Serão produzidos 25 Kg de bolo A e 20 Kg de bolo B.

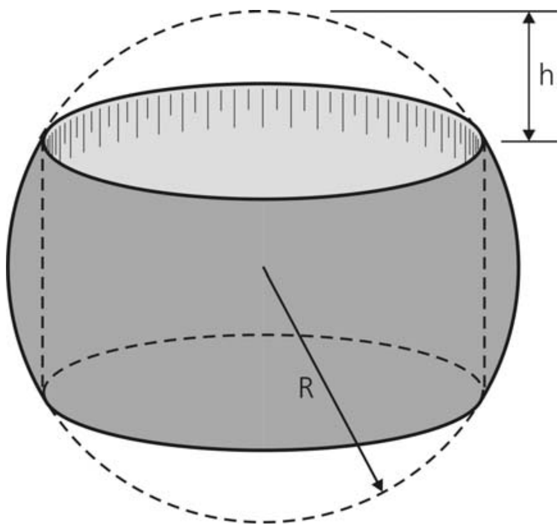
Comentários

O item **a** dessa questão envolve apenas cálculos muito simples, além da extração correta de dados do enunciado. Por sua vez, o item **b** exige a montagem e a resolução de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas. Acessível mesmo para alunos do ensino fundamental, essa foi a questão mais fácil da prova, com média superior a 2 pontos.

Entretanto, isso não impediu que muitos candidatos perdessem pontos importantes por errarem em contas, ou na montagem do sistema linear, como se observa no exemplo abaixo da média. Nesse exemplo, o vestibulando usou apenas o açúcar para determinar a quantidade a ser produzida de bolo do tipo A, e apenas a farinha para obter a quantidade de bolo do tipo B.

Deve-se ressaltar também que alguns candidatos supõem que é preciso descrever textualmente como resolver as questões de matemática, o que não é verdade. Como consequência, eles escrevem textos longos nos quais reproduzem boa parte do enunciado, mas não apresentam as contas efetuadas para a obtenção da solução. Em casos assim, não só o candidato gasta muito tempo em cada questão, como perde boa parte dos pontos por não justificar suas respostas. Contrastando com essa prática, o exemplo acima da média apresenta uma resolução bem organizada, com textos curtos e tabelas que explicam os passos adotados.

2. Uma peça esférica de madeira maciça foi escavada, adquirindo o formato de anel, como mostra a figura ao lado. Observe que, na escavação, retirou-se um cilindro de madeira com duas tampas em formato de calota esférica. Sabe-se que uma calota esférica tem volume $V_{cal} = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$, em que h é a altura da calota e R é o raio da esfera. Além disso, a área da superfície da calota esférica (excluindo a porção plana da base) é dada por $A_{cal} = 2\pi Rh$.



Atenção: não use um valor aproximado para π.

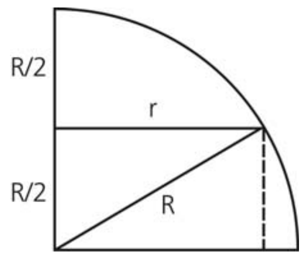
a) Supondo que h = R/2, determine o volume do anel de madeira, em função de R.

b) Depois de escavada, a peça de madeira receberá uma camada de verniz, tanto na parte externa, como na interna. Supondo, novamente, que h = R/2, determine a área sobre a qual o verniz será aplicado.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

O volume do anel é dado por $V_a = V_e - 2V_{cal} - V_{cil}$, em que o volume da esfera é $V_e = 4\pi R^3/3$, o volume do cilindro é $V_{cil} = \pi r^2(2R - 2h)$ e o volume da calota, V_{cal}, é dado no enunciado da questão.



Da figura ao lado, concluímos que $r^2 = R^2 - (R/2)^2 = 3R^2/4$. Assim, $V_{cil} = \pi \cdot (3R^2/4) \cdot (2R - 2R/2) = 3\pi R^3/4$.

Já a calota tem volume $V_{cal} = \frac{\pi (R/2)^2}{3}\left(3R - \frac{R}{2}\right) = \frac{5\pi R^3}{24}$.

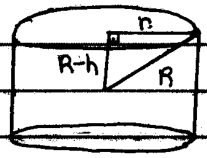
Logo, $V_a = \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{5\pi R^3}{12} - \frac{3\pi R^3}{4} = \frac{2\pi R^3}{12} = \frac{\pi R^3}{6}$.

Resposta: O anel tem volume igual a $\pi R^3/6$.

b) **(2 pontos)**
A área da superfície do anel é dada por $A_a = A_e - 2A_{cal} + A_{cil}$, em que $A_e = 4\pi R^2$, $A_{cil} = 2\pi r(2R - 2h)$ e A_{cal} é dada no enunciado da questão. Como $r = R\sqrt{3}/2$ e $h = R/2$, temos $A_{cil} = \pi R^2\sqrt{3}$.
Além disso, $A_{cal} = \pi R^2$. Logo, $A_a = 4\pi R^2 - 2\pi R^2 + \pi R^2\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})\pi R^2$.

Resposta: A área da superfície do anel é igual a $(2+\sqrt{3})\pi R^2$.

Exemplo Acima da Média

a)


$R^2 = r^2 + (R-h)^2$

$R^2 = r^2 + (R - R/2)^2$

$r^2 = R^2 - R^2/4$

$r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

V = Vesfera − Vcilindro − 2 Vcalota

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi r^2 (2R-2h) - 2\frac{\pi h^2 (3R-h)}{3}$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi \frac{R^2 3}{4}(R) - 2\cdot\frac{\pi \frac{R^2}{4}\left(3R - \frac{R}{2}\right)}{3}$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{3}{4}\pi R^3 - \frac{R^2\pi}{6}\cdot\left(\frac{5R}{2}\right)$

$V = \frac{16\pi R^3 - 9\pi R^3 - 5\pi R^3}{12}$

$V = \frac{2\pi R^3}{12} \Rightarrow V = \frac{\pi R^3}{6}$

b) do item a), $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

A = Aesfera − 2 Acalota + Alateral do cilindro

$A = 4\pi R^2 - 2\cdot 2\pi R h + 2\pi r(2R-2h)$

$A = 4\pi R^2 - 2\cdot 2\pi R\cdot \frac{R}{2} + 2\pi \frac{R\sqrt{3}}{2} R$

$A = 4\pi R^2 - 2\pi R^2 + \pi R^2\sqrt{3}$

$A = 2\pi R^2 + \sqrt{3}\pi R^2$

$A = \pi R^2(2+\sqrt{3})$

Exemplo Abaixo da Média

a) $V_a = V_{ESFERA} - 2 . V_{cal} - V_{CILINDRO}$

$V_a = \frac{4\pi R^3}{3} - 2 . \frac{\pi h^2}{3}(3R-h) - \frac{\pi R^2}{2} . R$

$V_a = \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{\cancel{2}}{3} . \pi . \frac{R^2}{4} . \frac{5R}{\cancel{2}} - \frac{\pi R^3}{2}$

$V_a = \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{5\pi R^3}{12} - \frac{\pi R^3}{2}$

$\boxed{V_a = \frac{5\pi R^3}{12}}$

b) $A_{SUP}^{EXT} = A_{ESFERA} - 2A_{cal}$

$A_{SUP}^{EXT} = 4\pi R^2 - 2 . \cancel{2}\pi R . \frac{R}{\cancel{2}}$

$A_{SUP}^{EXT} = 4\pi R^2 - 2\pi R^2$

$A_{SUP}^{EXT} = 2\pi R^2$

$A_{SUP}^{INT} = A_{LATERAL}^{CILINDRO}$

$A_{SUP}^{INT} = A_{BASE}^{CILIN} . H^{CILINDRO}$

$A_{SUP}^{INT} = \pi R . R$

$A_{SUP}^{INT} = \pi R^2$

$\therefore A_T = A_{SUP}^{EXT} + A_{SUP}^{INT}$

$A_T = 2\pi R^2 + \pi R^2$

$\boxed{A_T = 3\pi R^3}$

Comentários

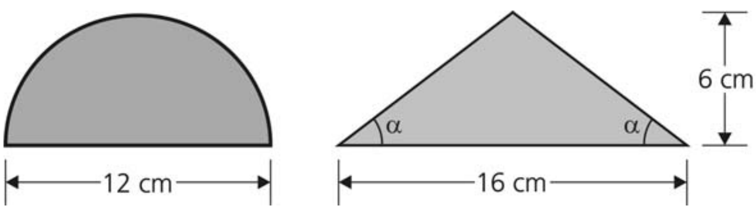
À diferença do que aconteceu em outros vestibulares da UNICAMP, as questões dessa prova não foram postas em ordem crescente de dificuldade. Assim, se a primeira questão foi considerada a mais fácil, a segunda foi aquela na qual o desempenho médio dos candidatos foi o mais baixo.

A grande quantidade de provas nas quais a questão aparece em branco sugere que a visualização de objetos tridimensionais ainda é uma dificuldade para muitos alunos do ensino médio, que nem sequer obtiveram as expressões $V_a = V_e - 2V_{cal} - V_{cil}$ e $A_a = A_e - 2A_{cal} + A_{cil}$.

Erros na determinação do raio da base do cilindro interno do anel também foram frequentes. No exemplo abaixo da média, o candidato supôs que o raio da base do cilindro era R, algo impossível, pois faria com que a circunferência coubesse dentro do cilindro. Já no item **b**, o candidato não só supôs que a altura do cilindro era R, como errou sua área lateral, escrevendo $A_{cil} = A_B.H = (\pi R).(R)$.

Por outro lado, a resolução apresentada no exemplo acima da média está impecável. Além da boa organização, o candidato fez um desenho do cilindro, indicando como calcular seu raio.

3. Um artesão precisa recortar um retângulo de couro com 10 cm x 2,5 cm. Os dois retalhos de couro disponíveis para a obtenção dessa tira são mostrados nas figuras abaixo.

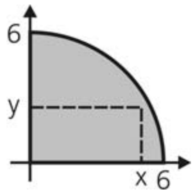


a) O retalho semicircular pode ser usado para a obtenção da tira? Justifique.

b) O retalho triangular pode ser usado para a obtenção da tira? Justifique.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

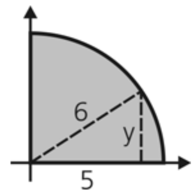


Suponhamos que o centro da base do retalho semicircular esteja sobre a origem dos eixos coordenados, como mostra a figura ao lado. Nesse caso, o retalho conterá a tira de couro se as coordenadas do ponto extremo superior direito do retângulo satisfizerem a desigualdade $x^2 + y^2 \leq 6^2$.

Fazendo o centro da base do retângulo também coincidir com a origem, obtemos x = 10/2 = 5 e y = 2,5. Logo, $x^2 + y^2 = 25 + 6{,}25 = 31{,}25 \leq 36$. Deste modo, a tira cabe no retalho.

Resposta: O retalho semicircular pode ser usado para a obtenção da tira.

a')

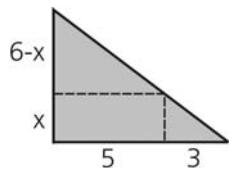


Suponhamos que o centro da base do retalho semicircular esteja sobre a origem dos eixos coordenados, como mostra a figura ao lado. Como a metade da base do retalho mede 5 cm, a altura máxima do retalho, que denominamos y, é dada pela equação $5^2 + y^2 = 6^2$.

Assim, $y = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$. Como $\sqrt{11} > \sqrt{9} = 3 > 2{,}5$, a tira cabe no retalho.

Resposta: O retalho semicircular pode ser usado para a obtenção da tira.

b) **(2 pontos)**

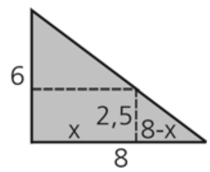


Dada a simetria do triângulo isósceles e do retângulo, trabalharemos apenas com a metade direita do retalho e da tira de couro, como mostra a figura ao lado. Vejamos, então, qual é a altura do maior retângulo de base 10/2 = 5 que pode ser inscrito no triângulo retângulo de catetos 8 e 6.

Usando a regra de três $\frac{6 - x}{5} = \frac{x}{3}$, obtemos 5x = 3(6 – x), ou 8x = 18, ou ainda x = 18/8 = 2,25 cm. Como esse valor é menor que 2,5 cm, a tira de couro não cabe no retalho triangular.

Resposta: O retalho triangular não pode ser usado para a obtenção da tira.

b')



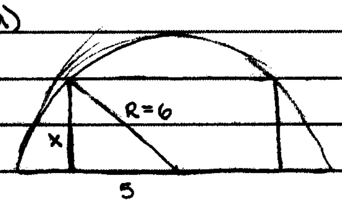
Dada a simetria do triângulo isósceles e do retângulo, trabalharemos apenas com a metade direita do retalho e da tira de couro, como mostra a figura ao lado. Vejamos, então, qual é a largura do maior retângulo de altura 2,5 que pode ser inscrito no triângulo retângulo de catetos 8 e 6.

Usando a regra de três $\frac{6}{8} = \frac{2{,}5}{8 - x}$, obtemos 6.8 – 6x = 2,5.8, ou 6x = 28, donde x = 28/6 = 14/3 cm. Como esse valor é menor que 5 cm, a tira de couro não cabe no retalho triangular.

Resposta: O retalho triangular não pode ser usado para a obtenção da tira.

Exemplo Acima da Média

a)

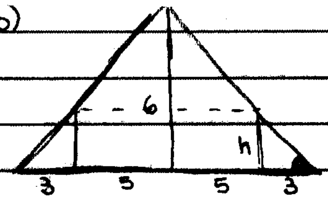


$x^2+5^2=6^2$

$x=\sqrt{11}$

R: como $\sqrt{11}>2{,}5$, o retalho semicircular PODE ser usado para a obtenção da tira.

b)



por semelhança: $\frac{3}{8}=\frac{h}{6}$ $h=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}=2{,}25$cm

R: com $2{,}25<2{,}5$; o retalho retangular NÃO pode ser utilizado.

Exemplo Abaixo da Média

a) $A_{retângulo} = 10 \cdot 2{,}5 = 25cm^2$

$A_{semicírculo} = \pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \cong 108\,cm^2$

Como a área do retalho semicircular é maior que a do retângulo, ele pode ser usado para a obtenção da ~~tira~~ tira.

b) $A_{retângulo} = 25cm^2$

$A_{triângulo} = \frac{b.h}{2} = \frac{16 \cdot 6}{2} = 48cm^2$

Como a área do retalho triangular é maior que a área da tira retangular, ele pode ser usado na obtenção desta tira.

Comentários

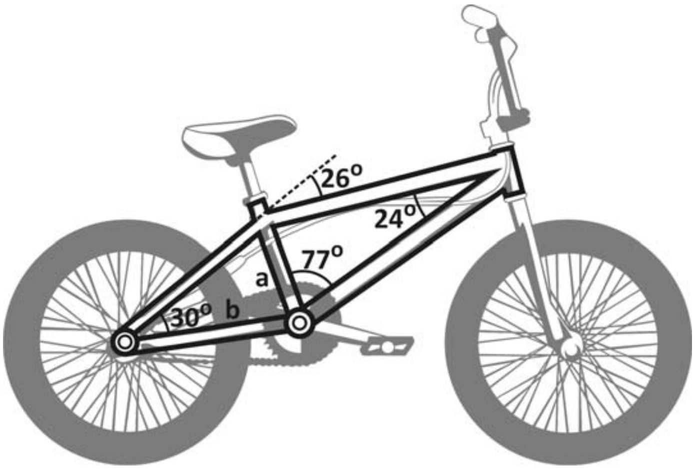
Essa é uma questão simples e prática de geometria. O exemplo acima da média mostra como resolvê-la da forma mais resumida possível. Nesse caso, os desenhos foram indispensáveis para que ficassem claros os passos adotados na resolução.

O exemplo abaixo da média mostra um raciocínio que, apesar de incorreto, foi muito usado pelos candidatos: a comparação da área do retalho com a área do retângulo desejado. Esse tipo de comparação só é útil quando o retalho tem área menor que o retângulo, caso em que é possível concluir que o retalho não serve. Se, por outro lado, o retângulo tem área menor que o retalho, não há garantia de que este possa ser usado, como mostra o item **b**. Assim, mesmo tendo encontrado a resposta correta para o item **a**, o candidato perdeu todos os pontos da questão, pois seus argumentos não eram válidos.

4. Laura decidiu usar sua bicicleta nova para subir uma rampa. As figuras abaixo ilustram a rampa que terá que ser vencida e a bicicleta de Laura.

a) Suponha que a rampa que Laura deve subir tenha ângulo de inclinação α, tal que $\cos(\alpha) = \sqrt{0{,}99}$. Suponha, também, que cada pedalada faça a bicicleta percorrer 3,15 m. Calcule a altura **h** (medida com relação ao ponto de partida) que será atingida por Laura após dar 100 pedaladas.

b) O quadro da bicicleta de Laura está destacado na figura à direita. Com base nos dados da figura, e sabendo que **a** mede 22 cm, calcule o comprimento **b** da barra que liga o eixo da roda ao eixo dos pedais.



Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Se cada pedalada desloca a bicicleta em 3,15 m, as 100 pedaladas fazem-na percorrer 315 m. Essa distância corresponde ao comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo que representa a rampa. A altura h desse triângulo é dada por 315sen(α). Como $\cos(\alpha) = \sqrt{0{,}99}$ e $\mathrm{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, temos $\mathrm{sen}^2(\alpha) + 0{,}99 = 1$, ou $\mathrm{sen}(\alpha) = \sqrt{1 - 0{,}99} = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1$. Logo, h = 315x0,1 = 31,5 m.

Resposta: As 100 pedaladas farão Laura subir 31,5 m.

a')
Se cada pedalada desloca a bicicleta em 3,15 m, as 100 pedaladas fazem-na percorrer 315 m. Essa distância corresponde ao comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo que representa a rampa. A base desse triângulo é dada por $315\cos(\alpha) = 315\sqrt{0{,}99}$. Usando, então, o teorema de Pitágoras, obtemos $(315\sqrt{0{,}99})^2 + h^2 = 315^2$. Logo, $h^2 = 315^2(1 - 0{,}99) = 315^2 \times 0{,}01$, de modo que h = 315×0,1 = 31,5 m.

Resposta: As 100 pedaladas farão Laura subir 31,5 m.

b) **(2 pontos)**
A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Assim, o terceiro ângulo do triângulo direito do quadro da bicicleta mede 180 – 24 – 77 = 79º. Somando esse valor ao ângulo de 26º, concluímos que o ângulo superior do triângulo esquerdo do quadro da bicicleta é igual a 180 – 26 – 79 = 75º. Assim, o outro ângulo desse triângulo mede 180 – 75 – 30 = 75º, de modo que o triângulo é isósceles. Nesse caso, o comprimento b é dado por a/[2.sen(15º)].

Como $\mathrm{sen}(15°) = \mathrm{sen}(45° - 30°) = \mathrm{sen}(45°)\cos(30°) - \mathrm{sen}(30°)\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, temos

$$b = \frac{22}{2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/4} = \frac{44}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}\text{cm.}$$

Resposta: A barra que liga o eixo da roda ao eixo dos pedais mede $44/\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$cm.

b')
A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Assim, o terceiro ângulo do triângulo direito do quadro da bicicleta mede 180 – 24 – 77 = 79º. Somando esse valor ao ângulo de 26º, concluímos que o ângulo superior do triângulo esquerdo do quadro da bicicleta é igual a 180 – 26 – 79 = 75º. Assim, o outro ângulo desse triângulo mede 180 – 75 – 30 = 75º, de modo que o triângulo é isósceles. Aplicando a lei dos senos a esse triângulo, obtemos $\frac{\text{sen}(30°)}{a} = \frac{\text{sen}(75°)}{b}$. Assim, o comprimento b é dado por a.sen(75º)/sen(30º). Como $\text{sen}(75°) = \text{sen}(45° + 30°) = \text{sen}(45°)\cos(30°) + \text{sen}(30°)\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, chegamos a $b = \frac{22\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)/4}{(1/2)} = 11\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\text{cm}$.

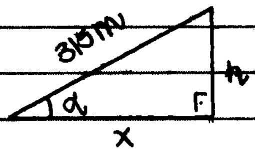
Resposta: A barra que liga o eixo da roda ao eixo dos pedais mede $11\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$cm.

b'') A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Assim, o terceiro ângulo do triângulo direito do quadro da bicicleta mede 180 – 24 – 77 = 79º. Somando esse valor ao ângulo de 26º, concluímos que o ângulo superior do triângulo esquerdo do quadro da bicicleta é igual a 180 – 26 – 79 = 75º. Assim, o outro ângulo desse triângulo mede 180 – 75 – 30 = 75º, de modo que o triângulo é isósceles.
Usando a lei dos cossenos, escrevemos $a^2 = b^2 + b^2 - 2.b.b.\cos(30°) = 2b^2 - 2b^2\sqrt{3}/2 = (2-\sqrt{3})b^2$. Assim, $b = a\Big/\sqrt{2-\sqrt{3}} = 22\Big/\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm.

Resposta: A barra que liga o eixo da roda ao eixo dos pedais mede $22\Big/\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm.

Exemplo Acima da Média

a) 100 pedaladas = $100 \times 3{,}15 = 315$ m



$\cos\alpha = \sqrt{0{,}99} = \frac{x}{315} \rightarrow 0{,}99 \times 315^2 = x^2$

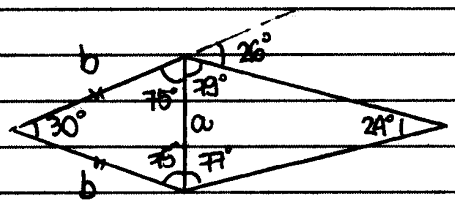
$X = \sqrt{99 \times 10^{-2} \times 315^2}$

$X = 315 \times 10^{-1} \times 3\sqrt{11} = 94{,}5\sqrt{11}$

$h^2 = 315^2 - x^2 = 315^2 - (0{,}99 . 315^2) = 315^2(1 - 0{,}99) = 315^2 \times 10^{-2}$

$h = \sqrt{315^2 \times 10^{-2}} = 315 \times 10^{-1} = \underline{31{,}5\,m}$

b)

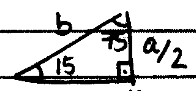


$a^2 = b^2 + b^2 - 2 . \cos 30 . b^2$

$a^2 = b^2(1 + 1 - 2\cos 30°)$

$484 = b^2\left(2 - \cancel{2}.\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$

$b^2 = \frac{484}{2-\sqrt{3}}$



$\text{sen } 15° = \frac{11}{b} = \text{sen}(45-30) = \text{sen } 45 . \cos 30 - \text{sen } 30 . \cos 45 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{11}{b}$

$b = \frac{44}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{44(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2} = \underline{11(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$ cm

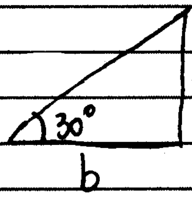
Exemplo Abaixo da Média

(A) $\sqrt{0{,}99} \cong 1 \longrightarrow \frac{h}{3{,}15\cdot100} = \cos(a),\ \cos(a) = \sqrt{0{,}99}$

$\frac{h}{3{,}15\cdot100} = 1 \longrightarrow h = 315\ m$

após 100 pedaladas, a altura h será de 315 metros.

(B)



$a = 22cm$

$tg\ 30° = \frac{a}{b}$, $a = 22\ cm$, $tg\ 30° = \sqrt{3}$.

então, $\sqrt{3} = \frac{22}{b}$,

$b = \frac{22}{\sqrt{3}} \longrightarrow b = \frac{22\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$

$b = \frac{22\sqrt{3}}{3}$ cm.

O comprimento b da bicicleta de Laura possui $\frac{22\sqrt{3}}{2}$ cm

Comentários

O item **a** dessa questão exigiu basicamente o conhecimento do teorema de Pitágoras ou da identidade Pitagórica $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$. Por sua vez, o item **b** requereu que os candidatos determinassem os ângulos de um triângulo a partir de outros ângulos do quadro da bicicleta, e que usassem o seno ou cosseno de 15° ou 75° para determinar o comprimento de uma das barras. A lei dos senos ou dos cossenos também podia ser empregada no item **b**. Felizmente, o desempenho médio dos candidatos foi bom, o que indica que eles dominam conceitos básicos de geometria plana e trigonometria.

No exemplo acima da média, o candidato apresentou as respostas corretas, mas efetuou cálculos em excesso. No item **a**, a determinação de x não era necessária, sendo suficiente a obtenção de x^2 para que se chegasse à solução. No item **b**, o vestibulando perdeu algum tempo calculando b de duas formas diferentes (usando a lei dos cossenos e dividindo o triângulo isósceles em dois triângulos retângulos). Note que ele recorreu a um bom desenho da estrutura da bicicleta para justificar os ângulos determinados nesse item.

No exemplo abaixo da média, o candidato supôs que a raiz de 0,99 era aproximadamente 1. Em seguida, considerou que a razão entre h e o comprimento da hipotenusa era igual a cos(α), em lugar de sen(α). Assim, concluiu que h = 315 m, o que naturalmente era impossível, pois faria com que a hipotenusa e um dos catetos do triângulo tivessem o mesmo comprimento. No item **b**, o mesmo candidato supôs que a e b eram os catetos de um triângulo retângulo, um erro bastante comum. Além disso, enganou-se ao afirmar que $\tan(30°) = \sqrt{3}$.

5. O valor presente, V_p, de uma parcela de um financiamento, a ser paga daqui a n meses, é dado pela fórmula abaixo, em que r é o percentual mensal de juros ($0 \le r \le 100$) e p é o valor da parcela.

$$V_p = \frac{p}{\left[1 + \frac{r}{100}\right]^n}$$

a) Suponha que uma mercadoria seja vendida em duas parcelas iguais de R$ 200,00, uma a ser paga à vista, e outra a ser paga em 30 dias (ou seja, 1 mês). Calcule o valor presente da mercadoria, V_p, supondo uma taxa de juros de 1% ao mês.

b) Imagine que outra mercadoria, de preço 2p, seja vendida em duas parcelas iguais a p, sem entrada, com o primeiro pagamento em 30 dias (ou seja, 1 mês) e o segundo em 60 dias (ou 2 meses). Supondo, novamente, que a taxa mensal de juros é igual a 1%, determine o valor presente da mercadoria, V_p, e o percentual mínimo de desconto que a loja deve dar para que seja vantajoso, para o cliente, comprar à vista.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

O valor presente da segunda parcela é dado por $V_p = 200 \Big/ \left[1+\frac{1}{100}\right]^1 = 200/1{,}01$, que corresponde, aproximadamente, a R$ 198,02. Somando esse valor à primeira parcela, obtemos 200,00 + 198,02 = R$398,02, que é o valor presente da mercadoria.

Resposta: O valor presente da mercadoria é R$ 398,02.

b) **(2 pontos)**

Se não há entrada, o valor presente da primeira mercadoria é $V_p^1 = p \Big/ \left[1+\frac{1}{100}\right]^1 = p/1{,}01$. Já o valor presente da segunda mercadoria é $V_p^2 = p \Big/ \left[1+\frac{1}{100}\right]^2 = p/1{,}01^2$. Somando esses dois termos, obtemos $V_p = V_p^1 + V_p^2 = p/1{,}01 + p/1{,}01^2 = (2{,}01/1{,}01^2)p$, que equivale a, aproximadamente, 1,97p. Considerando que a mercadoria custa 2p, deve-se dar um desconto de, ao menos, (2 – 1,97)/2 = 0,015, ou 1,5%.

Resposta: O desconto não deve ser inferior a 1,5%.

Exemplo Acima da Média

a) $V_p = \dfrac{200}{\left[1+\frac{1}{100}\right]^0} + \dfrac{200}{\left[1+\frac{1}{100}\right]^1} = 200 + \dfrac{200}{\frac{101}{100}} = 200 + 200 \cdot \dfrac{100}{101}$

$V_p = \dfrac{20.200 + 20.000}{101} = \dfrac{40.200}{101} = 398$

O valor presente da mercadoria é de aproximadamente 398 reais.

b) $V_p = \dfrac{p}{\left[1+\frac{1}{100}\right]^1} + \dfrac{p}{\left[1+\frac{1}{100}\right]^2} = \dfrac{p}{\frac{101}{100}} + \dfrac{p}{\frac{10.201}{10.000}} = \dfrac{100p}{101} + \dfrac{10.000p}{10.201}$

$V_p = \dfrac{20.100p}{10.201}$ $\quad V_p = 1{,}97p$ $\quad$ $2p - 100\%$, $1{,}97p - x$ $\quad x = \dfrac{197}{2} = 98{,}5\%$

$D = 100 - 98{,}5 = 1{,}5\%$

O valor presente da mercadoria é de 1,97p, o desconto mínimo que a loja deve dar para que seja vantajosa a compra à vista é de 1,5%.

Exemplo Abaixo da Média

a) • $V_p = \frac{400}{[1+0{,}01]^1}$

$V_p = \frac{400}{1{,}01}$

$V_p = \frac{400 \cdot 10^2}{101}$

$V_p = 398{,}01$

Resposta: O valor presente da mercadoria V_p seria de 398,01 reais

b) • Valor V_p:

$V_p = \frac{2p}{[1+\frac{1}{100}]^2}$

$V_p = \frac{2p}{1+\frac{1}{100^2}}$

$V_p = \frac{2p}{\frac{10^4+1}{10^4}}$

$V_p = \frac{2p \cdot 10^4}{10^4+1}$

• Valor à vista

$V_p = \frac{2p}{1{,}01}$

Resposta: O valor presente da mercadoria seria $\frac{2p \cdot 10^4}{10^4+1}$

Comentários

Apesar de fazer parte do cotidiano de quase todas as pessoas, o cálculo de juros e de descontos em pagamentos ainda não foi assimilado pela maioria dos consumidores. Talvez por esse motivo, algumas lojas brasileiras obtêm lucro maior com seus planos de financiamento aos clientes do que com a venda de mercadorias.
Mesmo de posse da fórmula do valor presente, muitos vestibulandos tiveram dificuldade em usá-la. Um número ainda maior cometeu erros na divisão ou multiplicação por 1,01.

No item **a** do exemplo abaixo da média, o candidato usa apenas uma fórmula, com prestação de R$ 400 e n = 1. Depois, espantosamente, obtém a resposta correta (R$ 398,01) a partir de 40000/101. No item **b**, além de também usar apenas uma fórmula, o candidato diz, erroneamente, que $(1+1/100)^2 = 1 + 1/100^2$. Finalmente, esquece de calcular o desconto.

Já o candidato do exemplo acima da média mostra de forma clara como resolver os dois itens, embora arredonde o resultado de **a**, em lugar de deixá-lo com duas casas decimais, como é costume fazer quando se trata de dinheiro. No item **b**, ele observa que o valor presente corresponde a 98,5% do valor a ser pago em duas parcelas, obtendo o desconto em seguida.

6. Uma empresa fabricante de aparelhos que tocam músicas no formato MP3 efetuou um levantamento das vendas dos modelos que ela produz. Um resumo do levantamento é apresentado na tabela ao lado.

Modelo	Preço (R$)	Aparelhos vendidos (milhares)
A	150	78
B	180	70
C	250	52
D	320	36

a) Em face dos ótimos resultados obtidos nas vendas, a empresa resolveu sortear um prêmio entre seus clientes. Cada proprietário de um aparelho da empresa receberá um cupom para cada R$ 100,00 gastos na compra, não sendo possível receber uma fração de cupom. Supondo que cada proprietário adquiriu apenas um aparelho e que todos os proprietários resgataram seus cupons, calcule o número total de cupons e a probabilidade de que o prêmio seja entregue a alguma pessoa que tenha adquirido um aparelho com preço superior a R$ 300,00.

b) A empresa pretende lançar um novo modelo de aparelho. Após uma pesquisa de mercado, ela descobriu que o número de aparelhos a serem vendidos anualmente e o preço do novo modelo estão relacionados pela função n(p) = 115 – 0,25p, em que n é o número de aparelhos (em milhares) e p é o preço de cada aparelho (em reais). Determine o valor de p que maximiza a receita bruta da empresa com o novo modelo, que é dada por n × p.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
O número total de cupons é igual a 78000 + 70000 + 2x52000 + 3x36000 = 360000. Desses, 3x36000 = 108000 foram dados a proprietários de aparelhos com preço maior que R$ 300,00. Logo, a probabilidade pedida é igual a 3x36/360 = 0,3.

Resposta: Foram distribuídos 360000 cupons. A probabilidade de que o prêmio seja entregue a uma pessoa que comprou um aparelho com custo superior a R$ 300,00 é igual a 0.3, ou 30%.

b) **(2 pontos)**
A receita bruta da empresa é dada por r(p) = p x n(p) = p(115 – 0,25p). Essa função tem como raízes p = 0 e p = 115/0,25 = 460. Como o coeficiente que multiplica o termo quadrático de r(p) é negativo, essa função assume seu valor máximo em p = (0 + 460)/2 = 230.

Resposta: O valor de p que maximiza a receita bruta é R$ 230,00.

b')
A receita bruta da empresa é dada por r(p) = p x n(p) = 115p – 0,25p^2. Como o coeficiente que multiplica o termo quadrático dessa função é negativo, o valor máximo ocorre em p = –b/2a = –115/[2 × (–0,25)] = 230.

Resposta: O valor de p que maximiza a receita bruta é R$ 230,00.

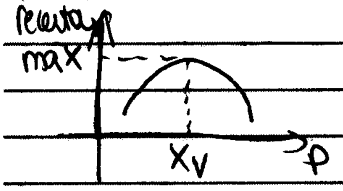
Exemplo Acima da Média

a) número de cupons = 78 + 70 + 104 + 108 = 360 cupons //

$p = \dfrac{\text{nº de }\cancel{\text{pessoas q. compraram modelo D}}\text{ cupons recebidos pelo}}{\text{nº total}} = \dfrac{108}{360} = \dfrac{3}{10} = 30\%$ //

b) $n(p) = 115 - 0{,}25p$

receita bruta $= n \times p = 115p - 0{,}25p^2$



$X_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-115}{-2 \cdot 0{,}25} = 230$

resposta: p = R$ 230

Exemplo Abaixo da Média

A) Como cada produto rendeu cupons aos seus compradores, já que todos custam mais de R$ 100,00, então:

Compradores de A: 78 000 cupons
Compradores de B: 70 000 cupons
Compradores de C: 104 000 cupons
Compradores de D: 108 000 cupons
$\boxed{\text{Número total de cupons: 360 000 cupons}}$

A probabilidade de alguma pessoa que tenha gasto mais de 300 reais, ou seja, um comprador D ganhar é:

$$p = \frac{36\,000}{360\,000} = 0,1 \text{ ou } 10\%.$$

B) O valor da receita bruta será maximizado quando $n = p$. Portanto:

$$n \cdot n = 115 - 0,25n$$
$$(n^2 + 0,25n - 115 = 0) \times 100$$
$$(20n^2 + 5n - 2300 = 0) \div 5$$
$$4n^2 + n - 460 = 0$$
$$\Delta = 7360$$

$$n = \frac{1 \pm 2\sqrt{115}}{8} \rightarrow n' = 1/8 + \sqrt{115}/4$$
$$n'' = 1/8 - \sqrt{115}/4$$

$$p = \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{115}}{4}\right) \text{ reais}$$

Comentários

O item **a** dessa questão envolveu apenas a contagem do número de cupons e a aplicação elementar do conceito de probabilidade. A maioria dos candidatos respondeu corretamente, apesar de vários terem fornecido 360 como resposta, em lugar de 360000, como ocorreu no exemplo acima da média. Felizmente, esse erro não impediu que os candidatos calculassem a probabilidade correta, o que lhes permitiu obter parte dos pontos do item.

Já o desempenho médio no item **b** foi claramente inferior. Nesse item, muitas pessoas consideraram simplesmente que r(p) = n(p), obtendo um resultado errado. Outro erro não tão incomum foi cometido pelo candidato do exemplo abaixo da média, que supôs que n(p) equivalia ao produto de n por p. Esse candidato também esqueceu que os 36000 aparelhos do modelo D geraram 108000 cupons, obtendo 10% como resposta no item **a**, em lugar de 30%.

7. Sejam dadas as funções $f(x) = 8/4^{2x}$ e $g(x) = 4^x$.

a) Represente a curva y = f(x) no gráfico abaixo, em que o eixo vertical fornece $\log_2(y)$.

b) Determine os valores de y e z que resolvem o sistema de equações

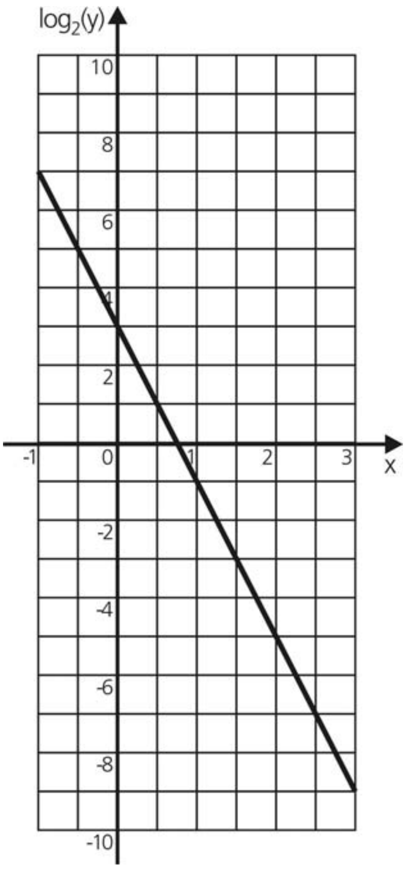
$$\begin{cases} f(z) & = & g(y) \\ f(y)/g(z) & = & 1 \end{cases}$$

Dica: converta o sistema acima em um sistema linear equivalente.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Aplicando o logaritmo na base 2 aos dois lados da equação $y = f(x)$, obtemos $\log_2(y) = \log_2(8) - \log_2(4^{2x})$, ou simplesmente $\log_2(y) = 3 - 4x$. O gráfico desejado é mostrado ao lado.



Resposta: A curva desejada é representada no gráfico ao lado.

b) **(2 pontos)**

O sistema fornecido é equivalente a

$$\begin{cases} 8/4^{2z} & = & 4^{y} \\ 8/(4^{2y}4^{z}) & = & 1. \end{cases}$$

Aplicando o logaritmo na base 2 aos dois lados das duas equações acima, obtemos

$$\begin{cases} \log_2(8) - \log_2(4^{2z}) & = & \log_2(4^{y}) \\ \log_2(8) - \log_2(4^{2y}) - \log_2(4^{z}) & = & \log_2(1), \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 3 - 4z & = & 2y \\ 3 - 4y - 2z & = & 0. \end{cases}$$

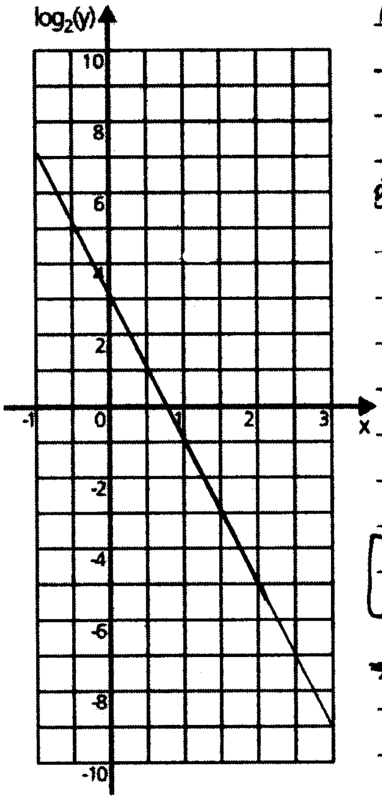
Esse sistema equivale a

$$\begin{cases} 2y + 4z & = & 3 \\ 4y + 2z & = & 3, \end{cases}$$

cuja solução é dada por $y = 1/2$ e $z = 1/2$.

Resposta: $y = 1/2$ e $z = 1/2$.

Exemplo Acima da Média



A) $f(x) = \frac{8}{4^{2x}} \Rightarrow y = \frac{2^3}{2^{4x}} \Rightarrow \log_2 y = 3\log_2 2 - x\,4\log_2 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 y = -4x + 3$

B) $f(z) = \frac{2^3}{2^{4z}} \; ; \; g(y) = 2^{2y} \Rightarrow 2^{3-4z} = 2^{2y}$

$\frac{f(y)}{g(z)} = \frac{2^{(3-4y)}}{2^{2z}} = 2^0 \Rightarrow 2^{3-4y-2z} = 2^0$

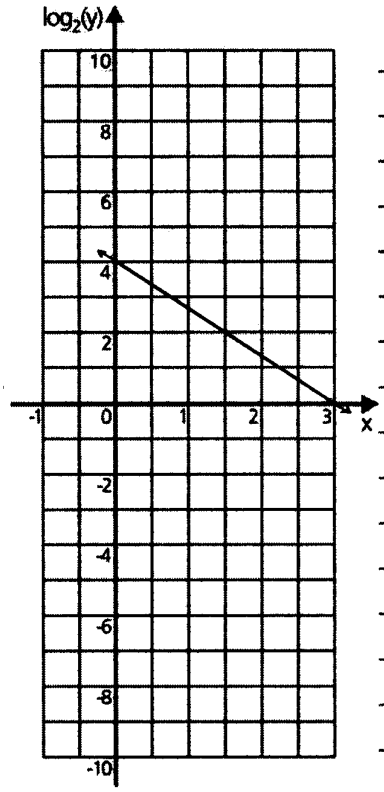
ASSIM: $\begin{cases} 3-4z = 2y \\ 3-4y-2z = 0 \end{cases}$

APLICANDO O MÉTODO DE GAUSS-JORDAN NA MATRIZ AUMENTADA DO SISTEMA ACIMA TEMOS:

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3/2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3/2 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$ PIVÔ   ASSIM: $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Exemplo Abaixo da Média



a) $\log_2 y = x$

$2^x = y$

$2^x = \frac{2^3}{2^{4x}} \therefore x = 3$ e $y = 4$

b) $\begin{cases} \frac{8}{4^z} = 4^y \to \cancel{2}^3 = \cancel{2}^{4z} \cdot \cancel{2}^{2y} \\ \quad 3 = 4z \cdot 2y \\ \frac{\frac{8}{4^{2y}}}{4^z} = 1 \to \frac{8}{4^{2y}} \cdot \frac{1}{4^z} = 1 \to 2^3 = 4^{2y} \cdot 4^z \\ \quad 3 = 4y \cdot 2z \end{cases}$

$\begin{cases} 3 = 4z \cdot 2y \to y = \frac{3}{8z} \to \boxed{y = 3/8} \\ 3 = 4y \cdot 2z \end{cases}$

$3 = 4 \cdot \left(\frac{3}{8z}\right) \cdot 2z \to \boxed{z = 1}$

$\boxed{R: y = 3/8 \text{ e } z = 1}$

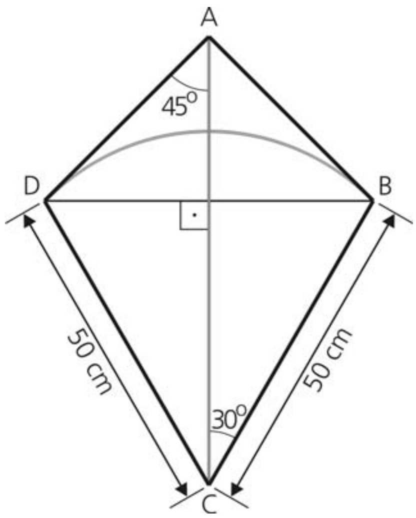
Comentários

Gráficos nos quais um dos eixos apresenta escala logarítmica estão disponíveis em planilhas eletrônicas e são muito usados para revelar o comportamento de funções exponenciais. O item **a** dessa questão explora esse tipo de gráfico, enquanto o item **b** exige dos vestibulandos o domínio de logaritmos e a resolução de um sistema linear simples.

É ótimo perceber, a partir das questões do vestibular, que o desempenho dos alunos do ensino médio em questões que envolvem funções exponenciais e logarítmicas vem melhorando ao longo do tempo. Ainda assim, é comum encontrar candidatos, como o do exemplo abaixo da média, que se confundem ao aplicar regras de logaritmos.

Já no exemplo acima da média, o detalhe mais interessante foi o uso do método de Gauss-Jordan para a resolução do sistema linear.

8. O papagaio (também conhecido como pipa, pandorga ou arraia) é um brinquedo muito comum no Brasil. A figura ao lado mostra as dimensões de um papagaio simples, confeccionado com uma folha de papel que tem o formato do quadrilátero ABCD, duas varetas de bambu (indicadas em cinza) e um pedaço de linha. Uma das varetas é reta e liga os vértices A e C da folha de papel. A outra, que liga os vértices B e D, tem o formato de um arco de circunferência e tangencia as arestas AB e AD nos pontos B e D, respectivamente.



a) Calcule a área do quadrilátero de papel que forma o papagaio.

b) Calcule o comprimento da vareta de bambu que liga os pontos B e D.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

A área do quadrilátero é a soma das áreas do triângulo equilátero BCD e do triângulo retângulo ABD. O triângulo BCD tem base igual a 50 cm e altura $h = \sqrt{50^2 - 25^2} = 25\sqrt{3}$ cm, de modo que sua área é $A_{BCD} = 50 \times 25\sqrt{3}/2 = 625\sqrt{3}$ cm². Já o triângulo ABD tem 50 cm de base e 25 cm de altura, de modo que sua área é $A_{ABD} = 50 \times 25/2 = 625$ cm². Logo, $A_{ABCD} = 625\sqrt{3} + 625 = 625(1+\sqrt{3})$ cm².

Resposta: O quadrilátero de papel tem área igual a $625(1+\sqrt{3})$ cm².

a')

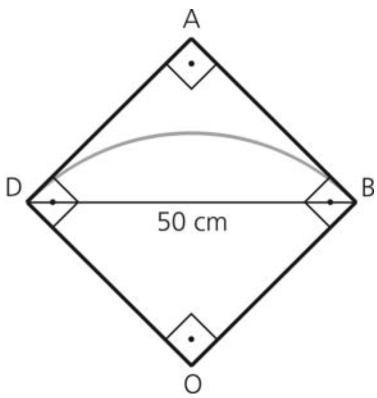
Opcionalmente, podemos definir $h_{BCD} = 50\cos(30°) = 50 \cdot \sqrt{3}/2 = 25\sqrt{3}$ cm, o que nos leva ao mesmo resultado apresentado acima.

Resposta: O quadrilátero de papel tem área igual a $625(1+\sqrt{3})$ cm².

b) **(2 pontos)**

Como o arco de circunferência que define a vareta curva de bambu tangencia as arestas AB e AD, o segmento OD que liga o centro da circunferência ao ponto D faz um ângulo de 90° com a aresta AD. Da mesma forma, os segmentos OB e AB são perpendiculares. Assim, como o ângulo DÂB é reto, o arco corresponde a 1/4 da circunferência.

Uma vez que o segmento BD tem 50 cm, o comprimento do raio da circunferência é $r = \sqrt{25^2 + 25^2} = 25\sqrt{2}$ cm. Assim, a vareta mede $2\pi r/4 = 25\pi\sqrt{2}/2$ cm.



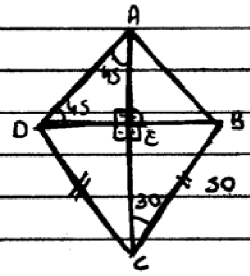
Resposta: A vareta de bambu que liga os pontos B e D mede $25\pi\sqrt{2}/2$ cm.

b’)

Opcionalmente, podemos definir $r = (50/2)/\text{sen}(45°) = 25/(\sqrt{2}/2) = 25\sqrt{2}$ cm, obtendo o mesmo resultado apresentado acima.

Exemplo Acima da Média

a)



ΔDBC é isosceles, portanto, altura $\overline{CE}$ também é mediana, $\overline{DE} = \overline{EB}$.

ΔECB:

$\text{sen}30 = \frac{\overline{EB}}{50} \therefore \frac{1}{2} = \frac{\overline{EB}}{50}$

$\boxed{\overline{EB} = 25} \therefore \boxed{\overline{DE} = 25}$

$\cos 30 = \frac{\overline{EC}}{50} \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{EC}}{50}$

$\boxed{\overline{EC} = 25\sqrt{3}}$

ΔADE isosceles:

$\boxed{\overline{AE} = \overline{DE} = 25}$

$A = (ADE) + (AEB) + (DEC) + (BEC)$

$A = \frac{25 \cdot 25}{2} + \frac{25 \cdot 25}{2} + \frac{25 \cdot 25\sqrt{3}}{2} + \frac{25 \cdot 25\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{A = 625(1+\sqrt{3})}$ //

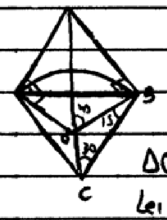
ΔDCB isosceles ⇒ $\overline{CE}$ é bissetriz

$D\hat{C}E = B\hat{C}E = 30 \Rightarrow D\hat{C}B = 60$

* Como $\widehat{DB}$ tg $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$

Centro é perpendicular a $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$,

Assim podemos calcular Raio:



ΔOCB:

Lei dos senos:

$\frac{R}{\text{sen}30} = \frac{50}{\text{sen}45}$

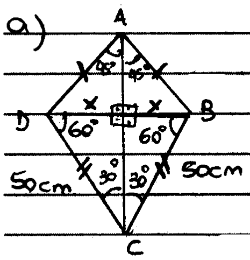
$R = 50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \boxed{R = 25\sqrt{2}}$

$\widehat{DB} = \frac{2\pi R}{4} = \frac{25\pi\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\widehat{DB} = 25\pi\sqrt{2}/2}$ //

Exemplo Abaixo da Média

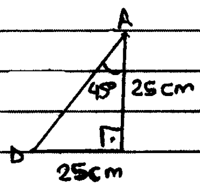
a)



$\text{sen}\,30° = \frac{x}{50}$

$\therefore \boxed{x = 25\text{cm}}$

Em um Δ esquemático:

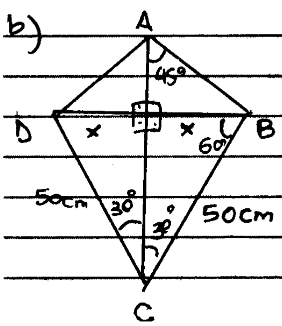


$\boxed{S_{papel} = 1\,875\text{cm}^2}$

Logo, a área do quadrilátero é dada por: $S_{quad.} = S_{\Delta DAB} + S_{\Delta DCB}$

$S_{quad} = \frac{50 \cdot 25}{2} + \frac{50 \cdot 50}{2} = 1875\text{cm}^2$

b)



$\text{sen}\,30° = \frac{x}{50}$

$\therefore \boxed{x = 25\text{cm}}$

como $DB = 2x$

$DB = 2 \cdot 25 = 50\text{cm}$

$\boxed{DB = 50\text{cm}}$

Comentários

Essa questão explora a geometria de uma pipa em formato de quadrilátero. O item **a**, que exigia apenas a determinação da soma das áreas de dois triângulos isósceles, foi respondido pela maioria dos vestibulandos. O erro mais comum nesse item foi a suposição de que a pipa era um losango. Outro erro, mais preocupante, foi a simplificação $625 + 625\sqrt{3} = 1250\sqrt{3}$.

O item **b** era, de fato, mais difícil que o anterior, de modo que poucos candidatos souberam responder. Muitos, inclusive, supuseram que a vareta que ligava os pontos B e D era reta, como no exemplo abaixo da média. Outros consideraram que os segmentos BC e CD representavam os raios da circunferência, de modo que seu centro O se confundia com o ponto C, e $B\hat{O}D$ media 60º. Nota-se, em ambos os casos, que a leitura do enunciado foi negligenciada durante a resolução da questão.

O exemplo acima da média mostra o trabalho de um candidato preocupado em justificar todos os seus passos. Entretanto, como o leitor deve ter percebido, a figura apresentada nesse exemplo seria mais fiel ao problema se o quadrilátero ODAB fosse um quadrado. Felizmente, a qualidade da figura não impediu a obtenção da resposta correta do item **b**. Observa-se, inclusive, que o candidato usou a lei dos senos para determinar o raio da circunferência, seguindo um caminho diferente daquele sugerido na resolução apresentada acima.

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, cujos coeficientes são números reais.

a) Suponha que exatamente seis elementos dessa matriz são iguais a zero. Supondo também que não há nenhuma informação adicional sobre A, calcule a probabilidade de que o determinante dessa matriz não seja nulo.

b) Suponha, agora, que $a_{ij} = 0$ para todo elemento em que j > i, e que $a_{ij} = i - j + 1$ para os elementos em que j ≤ i. Determine a matriz A, nesse caso, e calcule sua inversa, A^{-1}.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

O determinante de A é $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$. Como A tem apenas três elementos diferentes de zero, para que det(A) ≠ 0, é preciso que um desses produtos seja não nulo. Temos, portanto, 6 possibilidades de obter uma matriz como a desejada.

Por outro lado, o número total de matrizes com seis elementos nulos e três diferentes de zero é dado por $C_{9,3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9.8.7}{3.2.1} = 84$. Logo, a probabilidade de que det(A) ≠ 0 é igual a 6/84 = 1/14.

Resposta: A probabilidade de que o determinante não seja nulo é igual a 1/14.

b) **(2 pontos)**

Nesse caso, a matriz A é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. A inversa dessa matriz pode ser obtida aplicando-se operações elementares sobre suas linhas, como se mostra abaixo.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3=\ell_3-3\ell_1]{\ell_2=\ell_2-2\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_3=\ell_3-2\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Resposta: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo Acima da Média

a) As únicas maneiras de o determinante da matriz não ser ~~zero~~ nulo consistem em que os "zeros" ocupem um triângulo acima e abaixo da ~~ds~~ diagonal principal ou da diagonal secundária, ou seja, ocupar as posições: a21, a31, a32, a12, a13, a23 ou a11, a12, a21, a33, a23, a32.

Modos de distribuir os zeros na matriz: $C_{9,6} = 84$

$P(\det \neq 0) = \frac{2}{84} = \frac{1}{12}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $A.A^{-1} = I_n$

$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ 3a+2d+g & 3b+2e+h & 3c+2f+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} a=1 & h=-2 \\ b=0 & i=1 \\ c=0 \\ d=-2 \\ e=1 \\ f=0 \\ g=1 \end{cases}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo Abaixo da Média

a) Só será nula a matriz aquela que obtiver uma linha ou coluna composta por "zeros" como $A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

p = total $-$ p(matriz nula)

$p(\tilde{n}\ \text{nula}) = 1 - p(\text{matriz nula})$

$p(\tilde{n}\ \text{nula}) = 1 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3\right)$

$p(\tilde{n}\ \text{nula}) = 1 - \frac{1}{3}$

$\boxed{p(\tilde{n}\ \text{nula}) = \frac{2}{3}}$ //

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = I$

$A^{-1} = \frac{I}{A}$

Comentários

Nessa questão sobre matrizes e determinantes, exige-se também que os candidatos mostrem seus conhecimentos sobre combinações. No exemplo acima da média, o candidato acertou $C_{9,3}$, mas perdeu pontos por considerar que existiam apenas dois casos em que o determinante não era nulo. Já o item **b** foi resolvido de uma forma alternativa, montando-se um sistema linear a partir da equação $A.A^{-1} = I$.

No exemplo abaixo da média, o candidato afirma que, para a "matriz ser nula" (em lugar do determinante), é necessário que uma de suas linhas ou colunas seja composta apenas por zeros. Em seguida, calcula de forma errada a chance de que isso ocorra. Infelizmente, não é possível acompanhar o raciocínio do candidato, que afirma que a probabilidade de a matriz ser nula é dada por (1/3).(1/3).3. No item **b**, o mesmo candidato comete um pecado matemático ao escrever $A^{-1} = I/A$. Será que ele pode nos ensinar como dividir a matriz identidade por A?

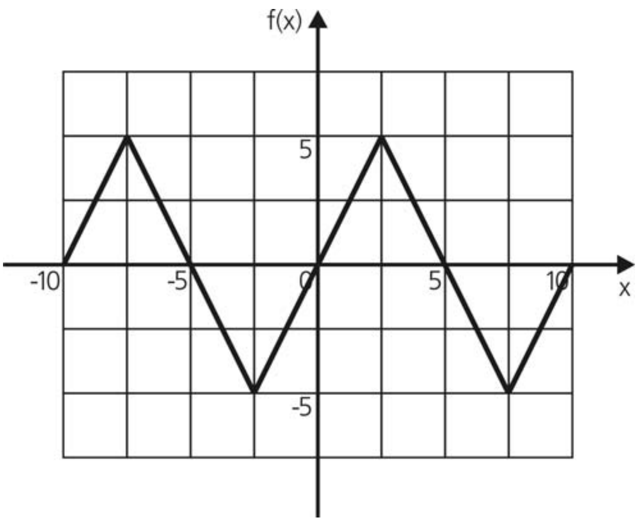
Outros erros comuns encontrados nas respostas foram considerar $A^{-1} = A^T$, ou mesmo $A^{-1} = 1$, o que evidencia pouca familiaridade com o conceito de inversa de matrizes.

10. Suponha que $f : IR \to IR$ seja uma função ímpar (isto é, f(–x) = –f(x)) e periódica, com período 10 (isto é, f(x) = f(x+10)). O gráfico da função no intervalo [0, 5] é apresentado abaixo.

a) Complete o gráfico, mostrando a função no intervalo [-10, 10], e calcule o valor de f(99).

b) Dadas as funções $g(y) = y^2 - 4y$ e $h(x) = g(f(x))$, calcule h(3) e determine a expressão de h(x) para $2,5 \leq x \leq 5$.

Resposta Esperada



a) **(2 pontos)**
O gráfico ao lado mostra a função no intervalo [–10, 10].
Como a função tem período 10, temos f(99) = f(9). Além disso, como f(7,5) = -5 e f(10) = 0, e a função é linear no intervalo [7,5; 10], temos também $\frac{f(9) - f(7,5)}{9 - 7,5} = \frac{f(10) - f(7,5)}{10 - 7,5}$.

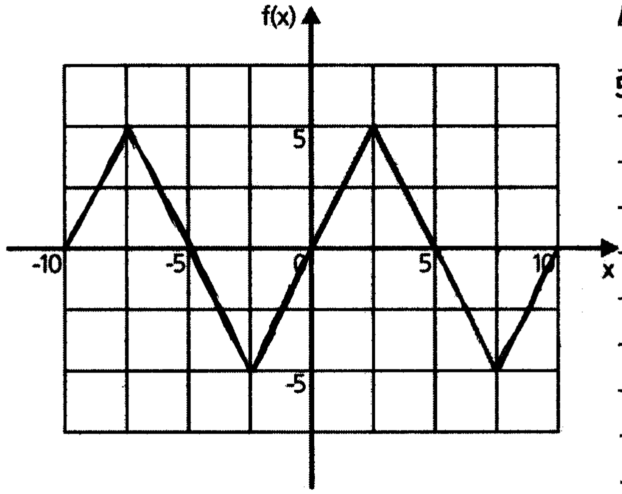
Logo, $f(9) = -5 + \frac{[0 - (-5)]x1,5}{2,5} = -5 + 3 = -2$.

Resposta: O gráfico da função é mostrado ao lado. Além disso, f(99) = –2.

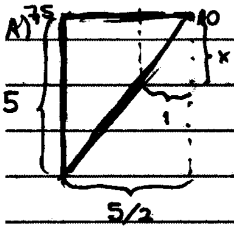
b) **(2 pontos)**
Como f(2,5) = 5 e f(5) = 0, temos f(x) = 10 – 2x no intervalo [2,5; 5]. Assim, f(3) = 4 e $g(f(3)) = g(4) = 4^2 - 4.4 = 0$.
Nesse mesmo intervalo, a composição das funções fornece $h(x) = (10 - 2x)^2 - 4(10 - 2x) = 4x^2 - 32x + 60$.

Resposta: Como f(3) = 4, temos h(3) = 0. De forma geral, $h(x) = 4x^2 - 32x + 60$ no intervalo [2,5; 5].

Exemplo Acima da Média



a)



$f(99) = f(9)$

Por semelhança de triângulos:

$\frac{x}{5} = \frac{1}{5/2}$

$x = \frac{5.2}{5}$

$\boxed{x = 2}$

Portanto, $f(9) = -2$ e $f(99) = -2$.

b) $f(x) = 10 - 2x$, para $2{,}5 \leq x \leq 5$.

$h(x) = f(x)^2 - 4.f(x)$

$h(x) = 100 + 4x^2 - 40x - 40 + 8x$

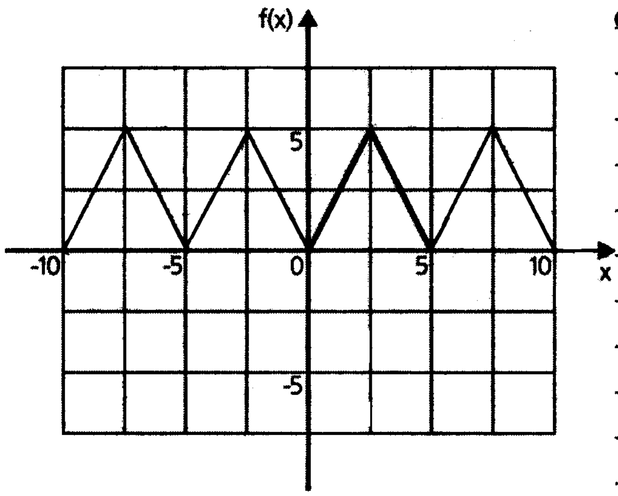
$\boxed{h(x) = 4x^2 - 32x + 60}$, para $2{,}5 \leq x \leq 5$.

$h(3) = 4.9 - 32.3 + 60$

$h(3) = 36 + 60 - 96$

$\boxed{h(3) = 0}$

Exemplo Abaixo da Média



a) $f(x) = f(x+10)$

$f(99) = f(99+10) \rightarrow f(99) = f(109)$

b) $h(x) = g(f(x))$

$h(x) = g(x+10) \rightarrow h(3) = g(3+10)$

$h(3) = g(13) \rightarrow h(3) = (13)^2 - 4.13$

$h(3) = 117$

Comentários

Essa questão mistura gráficos, funções ímpares, periodicidade e a equação da reta. É curioso reparar que, apesar de não exigir que os vestibulandos decorassem fórmulas complicadas e de fornecer a definição de função ímpar, essa foi a segunda questão mais difícil da prova, sendo superada apenas pela de geometria espacial. Percebe-se, assim, que a composição de funções e o traçado de gráficos de funções que não são dadas explicitamente não são assuntos bem explorados no ensino médio.

O exemplo acima da média mostra como fornecer uma resposta sucinta e clara. Como observamos em outras questões, o uso de uma figura foi essencial para identificar a regra de três usada na obtenção de f(99) = f(9).
No exemplo abaixo da média, o gráfico está errado, pois o candidato supôs que a função era par, ou seja, que f(–x) = f(x), em lugar de f(–x) = –f(x), como ocorre com funções ímpares. No item **b**, o candidato substituiu f(x)

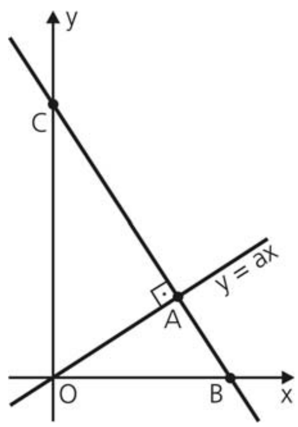
por x+10, uma interpretação incorreta da equação $f(x) = f(x+10)$ apresentada no enunciado. Dessa forma, concluiu que $h(3) = g(13) = 117$.

Muitos outros vestibulandos perderam pontos no item **b** por concluírem que $h(x) = x^2 - 8x + 15$, a partir de $h(x) = 4x^2 - 32x + 60$. É preciso que os alunos do ensino médio tenham claro que, embora a divisão por uma constante dos termos que aparecem nos dois lados de uma equação de segundo grau seja uma boa estratégia para a obtenção de suas raízes, o mesmo não se aplica à definição de funções.

11. No desenho abaixo, a reta $y = ax$ $(a > 0)$ e a reta que passa por B e C são perpendiculares, interceptando-se em A. Supondo que B é o ponto (2, 0), resolva as questões abaixo.

a) Determine as coordenadas do ponto C em função de a.

b) Supondo, agora, que a = 3, determine as coordenadas do ponto A e a equação da circunferência com centro em A e tangente ao eixo x.



Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Uma vez que as retas são perpendiculares, o coeficiente angular da reta que passa por B e C é $-1/a$. Como essa reta passa pelo ponto (2, 0), temos $0 = (-1/a).2 + b$, de modo que $b = 2/a$, e a reta é $y = -x/a + 2/a$. Logo, $C = (0, 2/a)$.

Resposta: O ponto C tem coordenadas (0, 2/a).

b) **(2 pontos)**

Se a = 3, o ponto A é a interseção das retas $y = 3x$ e $y = -x/3 + 2/3$. Logo, $3x = -x/3 + 2/3$, ou seja, $x = 1/5$. Assim, $y = 3/5$.

A circunferência de centro em A e tangente ao eixo x é dada por $(x - 1/5)^2 + (y - 3/5)^2 = 9/25$.

Resposta: O ponto A tem coordenadas (1/5, 3/5). Logo, a circunferência de centro em A e tangente ao eixo x é dada por $(x - 1/5)^2 + (y - 3/5)^2 = 9/25$.

Exemplo Acima da Média

a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & y_c & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ 2 & 0 \\ 0 & y_c \end{matrix} = 0 \Rightarrow -xy_c - 2y + 2y_c = 0$

$0 \quad -xy_c \quad -2y \quad 0 \quad 0 \quad 2y_c$

$-2y = xy_c - 2y_c$

$2y = -xy_c + 2y_c$

$y_s = -\frac{y_c}{2}x + y_c$

$m_y \cdot m_s = -1 \Rightarrow a \cdot \left(-\frac{y_c}{2}\right) = -1 \Rightarrow -ay_c = -2 \Rightarrow y_c = \frac{2}{a}$

$C(0;\ ^2/_a)$

b) $y_s = -\frac{y_c}{2}x + y_c = \frac{-^2/_a}{2}x + \frac{2}{a} \Rightarrow y_s = -\frac{\cancel{2}x}{a} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \frac{2}{a} = -\frac{x}{a} + \frac{2}{a} = \frac{-x+2}{3}$

$3x = \frac{-x+2}{3} \Rightarrow 9x = -x+2 \Rightarrow 10x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5} = 0{,}2$

$y_A = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad A(0{,}2\,;\,0{,}6)$

circunferência tangente em x $\Rightarrow R = y_A = 0{,}6$

$(x-0{,}2)^2 + (y-0{,}6)^2 = (0{,}6)^2 \Rightarrow x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25} + y^2 - \frac{6}{5}y + \cancel{\frac{9}{25}} = \cancel{\frac{9}{25}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 0{,}4x - 1{,}2y + 0{,}04 = 0$

Exemplo Abaixo da Média

a) $m_{AO} \cdot m_{CB} = -1$ - $\qquad$ reta (CB) $\rightarrow y = m_{CB}x + K_{CB}$

$a \cdot m_{CB} = -1 \qquad y = -ax + K_{CB}$

$m_{CB} = -a$ // $\qquad$ já que o ponto B pertence à reta,

$0 = -a \cdot 2 + K_{CB} \rightarrow K_{CB} = 2a$

reta (CB) $\rightarrow y = -ax + 2a$

o ponto $C = (0, y)$ e pertence à reta CB, ∴

$y = -a \cdot 0 + 2a \rightarrow y = 2a$. Sendo assim,

$\boxed{C(0, 2a)}$

b) ponto A $\rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ y = -3x + 6 \end{cases} \rightarrow 2y = 6 \rightarrow y = 3$

$x = 1 \rightarrow \boxed{A(1,3)}$

circunferência $\rightarrow (x - x_v)^2 + (y - y_v)^2 = (r)^2 \rightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1^2$

↳ distância de A ao eixo x

$\boxed{(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1}$

Comentários

Alguns alunos consideram a geometria analítica o tópico mais complicado da matemática do ensino médio. Por outro lado, outros têm grande facilidade em lidar com o assunto. Como resultado, essa questão foi a que apresentou a maior variação de notas da prova.

No exemplo acima da média, o candidato encontrou uma maneira correta, porém complicada, de encontrar a equação da reta s que passa por A, B e C, usando determinante. No item **b**, o candidato aproveitou a equação usada em **a** para encontrar o ponto A.

Já o candidato do exemplo abaixo da média cometeu um erro muito frequente no item **a**. Depois de obter corretamente $m_{AO}.m_{CB} = -1$, ele concluiu que $m_{CB} = -a$, em lugar de $-1/a$. Com isso, errou as coordenadas de C.

12. Dois *sites* de relacionamento desejam aumentar o número de integrantes usando estratégias agressivas de propaganda.

O *site* A, que tem 150 participantes atualmente, espera conseguir 100 novos integrantes em um período de uma semana e dobrar o número de novos participantes a cada semana subsequente. Assim, entrarão 100 internautas novos na primeira semana, 200 na segunda, 400 na terceira, e assim por diante.

Por sua vez, o *site* B, que já tem 2200 membros, acredita que conseguirá mais 100 associados na primeira semana e que, a cada semana subsequente, aumentará o número de internautas novos em 100 pessoas. Ou seja, 100 novos membros entrarão no *site* B na primeira semana, 200 entrarão na segunda, 300 na terceira, etc.

a) Quantos membros novos o *site* A espera atrair daqui a 6 semanas? Quantos associados o *site* A espera ter daqui a 6 semanas?

b) Em quantas semanas o *site* B espera chegar à marca dos 10000 membros?

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
O número de membros novos, a_n, que o *site* A admitirá na semana n é o n-ésimo termo de uma progressão geométrica com razão r = 2 e primeiro termo $a_1 = 100$. Assim, $a_n = 100.2^{n-1}$. Como n = 6, temos $a_6 = 100.2^5 = 3200$. Já o número de membros que o *site* A terá em seis semanas é igual à soma do número atual de associados com o somatório dos seis primeiros termos da progressão geométrica, S_6. Como $S_n = a_1 \dfrac{1-r^n}{1-r}$, temos $S_6 = 100\dfrac{1-2^6}{1-2} = 100 \times 63 = 6300$. Logo, o *site* terá $T_A = 6300 + 150 = 6450$ membros.

Resposta: Daqui a seis semanas, o *site* A admitirá 3200 novos membros, atingindo a marca de 6450 participantes.

b) **(2 pontos)**
O número de membros que serão admitidos no *site* B daqui a n semanas é dado pela progressão aritmética com termo geral $a_n = a_1 + (n-1).r$, em que r = 100 e $a_1 = 100$. Logo, $a_n = 100n$. O número total de associados desse *site* após n semanas é dado por $T_B = 2200 + S_n$, em que $S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$ é a soma dos termos da progressão aritmética. Assim, $T_B = 2200 + n(100 + 100n)/2 = 2200 + 50n + 50n^2$. O *site* terá 10000 membros quando $T_B = 2200 + 50n + 50n^2 = 10000$, ou $50n^2 + 50n - 7800 = 0$, ou ainda, $n^2 + n - 156 = 0$. Usando a fórmula de Bháskara, obtemos $n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 156}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{625}}{2} = \dfrac{-1 \pm 25}{2}$. Logo, n = 12 ou n = –13. Desprezando a raiz negativa, concluímos que n = 12.

Resposta: O *site* B terá 10000 membros em 12 semanas.

Exemplo Acima da Média

a) site A: novos participantes por semana:

PG (100, 200, 400, ...)

$\cancel{a_6 = a_1 + 5 \cdot h}$ $\quad a_6 = a_1 \cdot q^{6-1}$

$\cancel{a_6 = 100 + 5 \cdot 2}$ $\quad a_6 = 100 \cdot 2^5$

$a_6 = 100 \cdot 32$

$a_6 = \boxed{3200}$ membros novos daqui a 6 semanas

$S_6 = \dfrac{a_1 - a_6 \cdot q}{1-q}$

$S_6 = \dfrac{100 - 3200 \cdot 2}{1-2} = \dfrac{100 - 6400}{-1} = \dfrac{-6300}{-1}$

$S_6 = 6300$

+ 150 iniciais = $\boxed{6450 \text{ associados}}$

b) site B: novos participantes por semana:

PA (100, 200, 300, ...)

$10.000 = 2200 + \left[\dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}\right]$

$7800 = \dfrac{(100 + a_n^{*}) \cdot n}{2}$

$15600 = (100 + 100n) \cdot n$

$* \; a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$a_n = 100 + (n-1) \cdot 100$

$a_n = 100 (\cancel{1} + n - \cancel{1})$

$a_n = 100n$

$156\cancel{00} = 1\cancel{00}n + 1\cancel{00}n^2$

$n^2 + n - 156 = 0 < \begin{matrix} 12 \\ \cancel{-13} \end{matrix}$

R: Em 12 semanas.

Exemplo Abaixo da Média

(12) a) Para A, temos $A(n) = 100 \cdot 2^{n-1} + 150$

$A(6) = \underbrace{100 \cdot 2^5}_{\text{membros novos}} + 150$

membros novos = 3200 membros novos

$A(6) = 3200 + 150 = 3350$ membros

b) Para B, temos $B(\cancel{n}) = 100 + (n-1) 100 + 2200$

$10.000 = 2300 + (n-1) 100$

$100 = 23 + n - 1$

$22 + n = 100$

$\boxed{n = 78 \text{ semanas}}$

Comentários

Com o reordenamento das questões de matemática, uma questão fácil sobre progressão aritmética e geométrica apareceu em último lugar. Os vestibulandos perceberam a mudança, e não deixaram de responder à questão apenas porque estava no fim da prova. Com isso, a nota média da questão 12 foi elevada.

Como é de praxe, muitos candidatos resolveram o problema por enumeração, o que não é incorreto, mas costuma consumir muito tempo. Além disso, é preciso ter claro que, em respostas por enumeração, não se costuma aceitar o uso de reticências. Assim, não basta escrever uma sequência na forma 2200, 2300, ..., 10000, sendo necessário apresentar, de fato, todos os valores.

No exemplo acima da média apresentado acima, o candidato usou corretamente as fórmulas de PA e PG, chegando aos resultados esperados. Já no exemplo abaixo da média, embora o candidato tenha encontrado o número de membros novos do *site* A, concluiu que o número total de membros era igual à soma do número de membros novos na sexta semana com 150. Ao responder ao item **b**, o mesmo candidato usou a equação linear 10000 = 100 + (n-1).100 + 2200, em lugar de uma equação quadrática. Assim, acabou encontrando n = 78 semanas. De fato, esse foi o erro mais comum na questão.